

共振多光子跃迁的全量子理论

王 润 文

(中国科学院上海光机所)

提要: 本文从全量子理论观点分析了共振多光子过程, 采用相互作用表象及 Laplace 变换得到一多元线性代数方程组, 并获得其特征行列式的解析表达式, 从而得到多光子跃迁几率的解析解。比起已有的方法简洁得多。

Full quantization theory of resonant multiphoton transition

Wang Runwen

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: In this article we analyse the process of resonant multiphoton from the view point of full quantization theory. Using the interaction representation and Laplace Transform, a group of linear Algebra equations and then the analytic representation of its characteristic determinant are obtained. The analytic solution of multiphoton transition probability is at last obtained, and it is much simpler than other previous methods.

一、引 言

激光物理与激光化学是当前物理学的一个重要分支, 研究多波过程、多光子电离、激光喇曼辐射……等都牵涉到激光与原子分子作用的多光子过程, 早期是对双共振光谱进行较多的研究^[1], 从双光子过程到三光子过程进行过理论分析。能把这种研究过渡到更多光子的过程显然是必要的。1979年波兰的 Bialynicke-Birula 与美国 J. H. Eberly 等人对多光子过程用半经典理论做了解析分析, 得出了用多个厄密特多项式相乘的解, 形式很复杂^[2,3]。B. W. Shore 采用了 Poission 分布的能级假定也得到一个多光子跃迁几率

的近似表达式^[4]。A. Schenzle 及 R. G. Brewer 用算子代换法研究了双光子和三光子过程^[5]。我们从全量子理论出发, 采用相互作用表象得到了多光子过程跃迁几率的解析表示式, 形式更为简单。

二、相互作用方程的推导

如图 1 所示, 设一个原子分子系统有 m 个能级, 基态能级为 E_1 , 每一对靠近能级的波尔频率为 $\omega_2, \omega_3 \cdots \omega_m$ 。光场的频率相应为 $\Omega_2, \Omega_3 \cdots \Omega_m$, 在 m 光子过程中, m 个不同频率的光子同时分别作用到该原子系统的相应能级中, 处于基态的原子如同爬梯子一样可

收稿日期: 1982年9月1日。

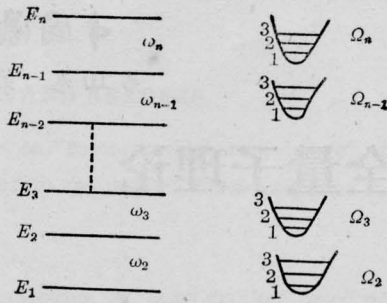


图 1

能被激发到最高的 E_n 能级。

光场与原子系统相互作用的哈密顿 H 为未相互作用前两个独立系统哈密顿 H_0 与相互作用后产生微扰哈密顿 H' 之和:

$$H = H_0 + H' \quad (1)$$

$$H_0 = H_A + H_R$$

$$= \sum \hbar \omega_k b_k^\dagger b_k + \sum \hbar \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) \quad (2)$$

(2) 式中 H_A 代表原子的哈密顿; H_R 代表自由场的哈密顿; \hbar 为普朗克常数除以 2π ; a_k^\dagger 、 a_k 代表具有光子频率为 Ω_k 的光子产生和湮灭算符; b_k^\dagger 、 b_k 为能级向上跃迁与向下跃迁算符。经过相互作用后的原子-光子系统显然其波函数 $\psi(t)$ 应满足 Schrödinger 方程的:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = H\psi(t) = (H_0 + H')\psi(t) \quad (3)$$

设定在相互作用表象下的波函数为 $\psi_I(t)$, 并作如下变换把 Schrödinger 表象下的波动方程(3)转到相互作用表象下:

$$\psi_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} \psi(t) \quad (4)$$

$$H_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} H'(t) e^{-iH_0 t/\hbar} \quad (5)$$

用算符 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ 作用到(4)式, 应用(3)、(5)式的关系容易获得相互作用表象下的波动方程是:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_I(t) = H_I(t) \psi_I(t) \quad (6)$$

微扰哈密顿 H' 可由下式表示^[6]:

$$H'(t) = \sum_k \sum_{ij} \hbar g_k (a_k + a_k^\dagger) b_i^\dagger b_j \quad (7)$$

$$\hbar g_k = i e \left(\frac{\hbar \Omega_k}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_k D_{ij} \quad (8)$$

式中 D_{ij} 为 i 、 j 能级的偶极矩矩阵元; ϵ_k 为光子的偏振方向单位矢; ϵ_0 为电极化常数; V 为腔体积。对于一对相邻能级间的光子跃迁情况, (7)式可以简化成如下表示:

$$H'(t) = \sum_k \hbar g_k (a_k + a_k^\dagger) (\sigma_k + \sigma_k^\dagger) \quad (9)$$

$$\sigma_k = b_{k-1}^\dagger b_k, \quad \sigma_k^\dagger = b_k^\dagger b_{k-1} \quad (10)$$

显然 σ_k^\dagger 、 σ_k 表示由 $k-1$ 能级变成 k 能级及由 k 能级向下跃迁为 $k-1$ 能级的算符。将(9)代入(5)经过运算可以得到在相互作用表象下相互作用哈密顿可表示为:

$$H_I(t) = \sum_k \hbar g_k (a_k e^{-i\Omega_k t} + a_k^\dagger e^{i\Omega_k t}) \times (\sigma_k e^{-i\omega_k t} + \sigma_k^\dagger e^{i\omega_k t}) \quad (11)$$

拼弃能量不守恒的两项 $a_k \sigma_k$ 及 $a_k^\dagger \sigma_k^\dagger$, 前者表示当原子从上能量向下跃迁时吸收一光子, 后者代表向上跃迁时抛出一光子。于是(11)式可以写成如下形式:

$$H_I(t) = \sum_k \hbar g_k (a_k \sigma_k^\dagger e^{-i(\Omega_k - \omega_k)t} + a_k^\dagger \sigma_k e^{i(\Omega_k - \omega_k)t}) \quad (12)$$

今设原子系统 m 个能级, 对应共振频率 ω_2 , $\omega_3 \cdots \omega_m$, 光场频率为 Ω_2 , $\Omega_3 \cdots \Omega_m$, 正如图 1 所示, (12)式可展开成:

$$H_I(t) = \{ \hbar \{ g_2 a_2 \sigma_2^\dagger e^{-i(\Omega_2 - \omega_2)t} + g_3 a_3 \sigma_3^\dagger e^{-i(\Omega_3 - \omega_3)t} + \cdots + g_{m-1} a_{m-1} \sigma_{m-1}^\dagger e^{-i(\Omega_{m-1} - \omega_{m-1})t} + g_m a_m \sigma_m^\dagger e^{-i(\Omega_m - \omega_m)t} + g_2 a_2^\dagger \sigma_2 e^{i(\Omega_2 - \omega_2)t} + g_3 a_3^\dagger \sigma_3 e^{i(\Omega_3 - \omega_3)t} + \cdots + g_{m-1} a_{m-1}^\dagger \sigma_{m-1} e^{i(\Omega_{m-1} - \omega_{m-1})t} + g_m a_m^\dagger \sigma_m e^{i(\Omega_m - \omega_m)t} \} \} \quad (13)$$

不受光场微扰的原子波函数可记作 $\psi_0 = \sum_n C_n |E_n\rangle$, E_n 为能级的标号; C_n 为归一化的几率振幅。而光场波函数可记作 $\psi_n = \sum_m C'_m |n_m\rangle$, n_m 代表光子数, 因此由于光场的扰动, 原子的含时波函数可记作 $\psi_I(t) =$

$\sum_{m'} C_m'' |E_m n_m\rangle$, 或写成下面展开式:

$$\begin{aligned} \psi_I(t) = & C_1 |E_1; n_2+1, n_3+1, \dots, n_m+1\rangle \\ & + C_2 |E_2; n_2, n_3+1, \dots, n_m+1\rangle \\ & + \dots + C_{m-1} |E_{m-1}; n_2, n_3, \dots, n_{m-1}, n_m \\ & + 1\rangle + C_m |E_m; n_2, n_3, \dots, n_m\rangle \quad (14) \end{aligned}$$

式中已把 C_m'' 取消撇号仍记作 C_m , 对于各能级波函数, 设对应各能级在未相互作用前光场光子数分别是 $n_2+1, n_3+1, \dots, n_m+1$; 由于 Ω_2 的作用原子吸收一光子跃迁至 E_2 能级, 故光子数由 n_2+1 变成 n_2 ; 只考虑相邻

$$\begin{aligned} i\hbar\{\dot{C}_1 |E_1; n_2+1, n_3+1, \dots, n_m+1\rangle + \dot{C}_2 |E_2; n_2, n_3+1, \dots, n_m+1\rangle + \dots \\ + \dot{C}_m |E_m; n_2, n_3, \dots, n_m\rangle\} = \hbar\{gC_{21} \sqrt{n_2+1} |E_2; n_2, n_3+1, \dots, n_m+1\rangle e^{-i(\Omega_2-\omega_2)t} \\ + g_3 C_2 \sqrt{n_3+1} |E_3; n_2, n_3, n_4+1, \dots, n_m+1\rangle e^{-i(\Omega_3-\omega_3)t} \\ + g_2 C_2 \sqrt{n_2+1} |E_1; n_2+1, n_3+1, \dots, n_m+1\rangle e^{i(\Omega_2-\omega_2)t} \\ + g_4 C_3 \sqrt{n_4+1} |E_4; n_2, n_3, n_4, n_5+1, \dots, n_m+1\rangle e^{-i(\Omega_4-\omega_4)t} \\ + g_3 C_3 \sqrt{n_3+1} |E_2; n_2, n_3+1, \dots, n_m+1\rangle e^{i(\Omega_3-\omega_3)t} \\ + g_5 C_4 \sqrt{n_5+1} |E_5; n_2, \dots, n_5, n_6+1, \dots, n_m+1\rangle e^{-i(\Omega_5-\omega_5)t} \\ + g_4 C_4 \sqrt{n_4+1} |E_3; n_2, n_3, n_4+1, \dots, n_m+1\rangle e^{i(\Omega_4-\omega_4)t} \\ + \dots \\ + g_m C_{m-1} \sqrt{n_m+1} |E_m; n_2, n_3, \dots, n_m\rangle e^{-i(\Omega_m-\omega_m)t} \\ + g_{m-1} C_{m-1} \sqrt{n_{m-1}+1} |E_{m-2}; n_2, n_3, \dots, n_{m-2}, n_{m-1}+1, n_m+1\rangle e^{i(\Omega_{m-1}-\omega_{m-1})t} \\ + g_m C_m \sqrt{n_m+1} |E_{m-1}; n_2, \dots, n_{m-1}, n_m+1\rangle e^{i(\Omega_m-\omega_m)t}\} \quad (15) \end{aligned}$$

式中 \dot{C}_m 代表 C_m 对时间的微分, 分别用于矢 $\langle E_1|, \langle E_2| \dots$ 等基矢作用到方程 (15) 的两边, 便得下列耦合的微分方程组:

$$\left. \begin{aligned} i\dot{C}_1 &= g_2 \sqrt{n_2+1} e^{i(\Omega_2-\omega_2)t} C_2 \\ i\dot{C}_2 &= g_2 \sqrt{n_2+1} e^{-i(\Omega_2-\omega_2)t} C_1 \\ &+ g_3 \sqrt{n_3+1} e^{i(\Omega_3-\omega_3)t} C_3 \\ &\dots \\ i\dot{C}_{m-1} &= g_{m-1} \sqrt{n_{m-1}+1} \\ &\times e^{-i(\Omega_{m-1}-\omega_{m-1})t} C_{m-2} \\ &+ g_m \sqrt{n_m+1} e^{i(\Omega_m-\omega_m)t} C_m; \\ i\dot{C}_m &= g_m \sqrt{n_m+1} e^{-i(\Omega_m-\omega_m)t} C_{m-1} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

由于原子在激发态寿命是有限的, 而几率振幅 $C_m(t)$ 在这有限时间区间内连续有限, 因此可以对几率振幅作 Laplace 变换; 令

$$\mathcal{L}(C_k(t)) = L_k(S) = \int_0^\infty e^{-st} C_k(t) dt \quad (17)$$

设初始时间 $t=0$, 粒子在基态, 即有初值条件

能级存在光学相通跃迁, 其余为禁戒, 因此每向上递增地跃迁一级, 就吸收一个光子, 这就是各个能级光子数的确定原则。

方程 (13) 和 (14) 要满足相互作用表象下的 Schrödinger 方程 (6)。

三、多光子跃迁耦合方程组

将 (13)、(14) 两组方程代入 Schrödinger 方程 (6) 可以得到如下微分方程式:

$$\begin{aligned} C_1(0) &= 1, C_2(0) = C_3(0) = C_4(0) \\ &= \dots = C_m(0) = 0 \quad (18) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\dot{C}_k(t)) = SL_k(S) - C_k(0) \quad (19)$$

因此对 (16) 式进行 Laplace 变换, 并设在共振激励条件下, 即 $\Omega_2 - \omega_2 = \Omega_3 - \omega_3 = \dots = \Omega_m - \omega_m = 0$, 使得

$$\left. \begin{aligned} i(SL_1 - 1) &= g_2 \sqrt{n_2+1} L_2 \\ iS L_2 &= g_2 \sqrt{n_2+1} L_1 \\ &+ g_3 \sqrt{n_3+1} L_3 \\ &\dots \\ iS L_{m-1} &= g_{m-1} \sqrt{n_{m-1}+1} L_{m-2} \\ &+ g_m \sqrt{n_m+1} L_m \\ iS L_m &= g_m \sqrt{n_m+1} L_{m-1} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

显然 (20) 是一组线性代数方程组, 若记

$$|D| = \begin{vmatrix} iS, & -g_2 \sqrt{n_2+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -g_2 \sqrt{n_2+1} & iS, & -g_3 \sqrt{n_3+1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -g_3 \sqrt{n_3+1} & iS, & -g_4 \sqrt{n_4+1} & \cdots & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & iS, & -g_m \sqrt{n_m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -g_m \sqrt{n_m+1} & iS \end{vmatrix} \quad (21)$$

若以列阵 $\begin{pmatrix} i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ (第 m 元)

去置换 (21) 的第 k 列记为 $|d_k|$, 即:

$$|d_k| = \begin{vmatrix} iS, & -g_2 \sqrt{n_2+1} & i & \cdot & \cdot & \cdot \\ -g_2 \sqrt{n_2+1} & iS & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & -g_3 \sqrt{n_3+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & iS, & -g_m \sqrt{n_m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -g_m \sqrt{n_m+1} & iS \end{vmatrix} \quad (22)$$

应用 (21) 及 (22) 可将 (20) 式的解写成下面形式:

$$L_k = \frac{|d_k|}{|D|}, \quad (k=1, 2, \dots, m) \quad (23)$$

$$|D| = \begin{vmatrix} S & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & S & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & S & 1 & \cdots & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & S & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & S \end{vmatrix} \\ \times (-g \sqrt{n+1})^n \\ = |\bar{D}| (-g \sqrt{n+1})^n \quad (26)$$

四、等间距跃迁的解析解

在多原子分子红外多光子吸收过程中, 等间距振转能级是通常遇到的, 在强的红外光场作用下有多达连续向上阶梯式吸收三十个光子^[8], 每一对等间距的能级都独立地与光场相互作用达到多光子激励与电离的目的。本节首先研究这一类情况。由于各能级间距及耦极矩阵元相等, 故有

$$\begin{aligned} n_2 = n_3 = n_4 = \cdots = n_m = n \\ g_1 = g_2 = g_3 = \cdots = g_m = g \end{aligned} \quad (24)$$

又令:

$$S' = \frac{iS}{-g \sqrt{n+1}}, \quad \alpha = \frac{i}{-g \sqrt{n+1}} \quad (25)$$

于是 (21) 及 (22) 式可表示成:

$$|d_k| = \begin{vmatrix} S & 1 & \alpha & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & S & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & S & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & S \end{vmatrix} \\ \times (-g \sqrt{n+1})^n \\ = |\bar{d}_k| (-g \sqrt{n+1})^n \quad (27)$$

显然 (26) 式在较低阶情况下是容易求得其展开式的:

$$|\bar{D}|_{3 \times 3} = \begin{vmatrix} S & 1 & \cdot \\ 1 & S & 1 \\ \cdot & 1 & S \end{vmatrix} = S^3 - 2S \equiv A \quad (28)$$

$$|\bar{D}|_{4 \times 4} = \begin{vmatrix} S & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & S & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & S & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & S \end{vmatrix} = S^4 - 3S^2 + 1 \equiv B \quad (29)$$

对于一般的 n 阶的展开式可以证明能展开为如下方程:

$$\begin{aligned} |\bar{D}|_{n \times n} = & A \left\{ S^{n-4} - (n-5)S^{n-6} \right. \\ & + \frac{(n-6)(n-7)}{2!} S^{n-8} \\ & - \frac{(n-7)(n-8)(n-9)}{3!} S^{n-10} \\ & + \frac{(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)}{4!} \\ & \times S^{n-12}, + \dots \left. \right\} \\ & - B \left\{ S^{n-5} - (n-6)S^{n-7} \right. \\ & + \frac{(n-7)(n-8)}{2!} S^{n-9} \\ & - \frac{(n-8)(n-9)(n-10)}{3!} S^{n-11} \\ & + \frac{(n-9)(n-10)(n-11)(n-12)}{4!} \\ & \times S^{n-13}, + \dots \left. \right\} \quad (30) \end{aligned}$$

这儿 $n > 4$, 对于 $n=3$ 或 4 由(28)及(29)式描述。上式中各项对于 S 出现负幂的应取消。要证明(30)展开式要用到 $|D|_{n \times n}$ 行列式的一个递推关系, 这个关系由(26)式容易得出:

$$|\bar{D}|_{(n+1) \times (n+1)} = |\bar{D}|_{n \times n} S - |\bar{D}|_{(n-1) \times (n-1)} \quad (31)$$

应用数学归纳法, 设 $n=n$ 时为正确, 令 $n=n+1=m$, 应用递推关系(31), 并用(30)式代入得:

$$\begin{aligned} |\bar{D}|_{m \times m} = & A \left\{ S^{n-3} - (n-4)S^{n-5} \right. \\ & + \frac{(n-5)(n-6)}{2!} S^{n-7} \\ & - \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{3!} S^{n-9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{4!} \\ & \times S^{n-11}, + \dots \left. \right\} \\ & - B \left\{ S^{n-4} - (n-5)S^{n-6} \right. \\ & + \frac{(n-6)(n-7)}{2!} S^{n-8} \\ & - \frac{(n-7)(n-8)(n-9)}{3!} S^{n-10} \\ & + \frac{(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)}{4!} \\ & \times S^{n-12}, + \dots \left. \right\} \\ = & A \left\{ S^{m-4} - (m-5)S^{m-6} \right. \\ & + \frac{(m-6)(m-7)}{2!} S^{m-8}, + \dots \left. \right\} \\ & - B \left\{ S^{m-5} - (m-6)S^{m-7} \right. \\ & + \frac{(m-7)(m-8)}{2!} S^{m-9}, + \dots \left. \right\} \quad (32) \end{aligned}$$

(32)式证明了展开式(30)的正确性。行列式(27)式的展开可以用(30)式来表示:

$$\begin{aligned} |\bar{d}_1|_{n \times n} = & \begin{vmatrix} \alpha & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & S & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & S & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & S & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & S \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & S \end{vmatrix} \\ = & \alpha |\bar{D}|_{n \times n} \quad (33) \end{aligned}$$

$$|\bar{d}_2|_{n \times n} = \begin{vmatrix} S & \alpha & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & S & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & S & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & S \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & S \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\alpha \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & S & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & S & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & S & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & S \end{vmatrix} \quad (34)$$

$$= (-1)\alpha |\bar{D}|_{(n-2) \times (n-2)} \quad (34)$$

一般地可推得

$$|\bar{d}_i|_{n \times n} = (-1)^{i-1} \alpha |\bar{D}|_{(n-i) \times (n-i)} \quad (35)$$

因此解(23)可以用以上关系表示便得:

$$L_i = \frac{|\bar{d}_i|_{n \times n}}{|D|_{n \times n}} = \frac{(-1)^{i-1} \alpha |\bar{D}|_{(n-i) \times (n-i)}}{|D|_{n \times n}} \quad (36)$$

式中 $|D|_{n \times n}$ 的展开式由(30)式表示, 将(36)式进行反 Laplace 变换即可求得多光子跃迁几率振幅:

$$C_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[L_i(S)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L_i(S) e^{st} dS \quad (37)$$

作为例子我们计算等间距四能级级联多光子跃迁情况, 吸收单光子、双光子及三光子可分别跃迁至第二能级、第三能级及第四能级, 相应跃迁几率为 $|C_2(t)|^2$ 、 $|C_3(t)|^2$ 及 $|C_4(t)|^2$, 由(37)式可以表示如下:

$$\left. \begin{aligned} C_2(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(-1)^{2-1} \alpha |D|_{2 \times 2}}{S'^4 - 3S'^2 + 1} \right] \\ &= -ip \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{S^2 + p^2}{S^4 + 3p^2 S^2 + p^4} \right] \\ C_3(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(-1)^{3-1} \alpha S'}{S'^4 - 3S'^2 + 1} \right] \\ &= p^2 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{S}{S^4 + 3p^2 S^2 + p^4} \right] \\ C_4(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(-1)^{4-1} \alpha}{S'^4 - 3S'^2 + 1} \right] \\ &= ip^3 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{S^4 + 3p^2 S^2 + p^4} \right] \end{aligned} \right\} (38)$$

应用 Laplace 反变换关系^[7]

$$\left. \begin{aligned} &\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(S^2 + \alpha^2)(S^2 + \beta^2)} \right] \\ &= \frac{\alpha \sin \beta t - \beta \sin \alpha t}{\alpha \beta (\alpha^2 - \beta^2)} \\ &\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{S}{(S^2 + \alpha^2)(S^2 + \beta^2)} \right] \\ &= \frac{\cos \alpha t - \cos \beta t}{\beta^2 - \alpha^2} \\ &\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{S^2 + b}{(S^2 + \alpha^2)(S^2 + \beta^2)} \right] \\ &= \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2} \left\{ \frac{b - \alpha^2}{\alpha} \sin \alpha t \right. \\ &\quad \left. - \frac{b - \beta^2}{\beta} \sin \beta t \right\} \end{aligned} \right\} (39)$$

若令:

$$p = g\sqrt{n+1}, \quad (40)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2} p, \quad \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2} p \quad (41)$$

便得:

$$\left. \begin{aligned} |C_2(t)|^2 &= \frac{1}{5} \left\{ \sin \left(\frac{(\sqrt{5}+1)}{2} pt \right) \right. \\ &\quad \left. + \sin \left(\frac{(\sqrt{5}-1)}{2} pt \right) \right\}^2 \\ |C_3(t)|^2 &= \frac{1}{5} \left\{ \cos \left(\frac{(\sqrt{5}+1)}{2} pt \right) \right. \\ &\quad \left. - \cos \left(\frac{(\sqrt{5}-1)}{2} pt \right) \right\}^2 \\ |C_4(t)|^2 &= \frac{1}{20} \left\{ (1 + \sqrt{5}) \right. \\ &\quad \times \sin \left(\frac{(\sqrt{5}-1)}{2} pt \right) - (\sqrt{5} - 1) \\ &\quad \times \sin \left(\frac{(\sqrt{5}+1)}{2} pt \right) \left. \right\}^2 \end{aligned} \right\} (42)$$

图 2 是(42)的曲线, 所取参数为 $p=1$ 。由图 2 可见在开始时多光子跃迁几率是很小的, 因为实际泵浦过程总是只能是短暂的, 当 $t=0.2$ 时, 双光子跃迁几率比单光子小两个数量级, 而三光子又较双光子跃迁几率小两个数量级。

$$+ , - \dots + (-1)^{m-1} S^{r-2(m-1)} \\ \times \sum_{i=q}^{r-1} \left\{ a_i^2 \sum_{j=q-2}^{i-2} \left(a_j^2 \sum_{k=q-3}^{j-2} a_k^2 \dots \right) \right\} + \dots \quad (48)$$

(48)式证明了(46)展开式的正确性。至于余子式(45)可以用(46)展开式表示如下:

$$|d_k| = (-1)^{k-1} i a_1 a_2 \dots a_{k-1} \\ \times |D|_{(n-k) \times (n-k)} \quad (49) \\ \{a_n \rightarrow a_{n+k}\}$$

式中 $\{a_n \rightarrow a_{n+k}\}$ 代表行列式展开后用 a_{n+k} 代换 a_n 而得到。

类似地解(23)可以用(48)与(49)式代入便有:

$$L_k = \frac{|d_k|_{n \times n}}{|D|_{n \times n}} \\ = \frac{(-1)^{k-1} i a_1 a_2 \dots a_{k-1} |D|_{(n-k) \times (n-k)} \{a_n \rightarrow a_{n+k}\}}{|D|_{n \times n}} \quad (50)$$

将(50)式进行 Laplace 反变换即可求得多光子跃迁的几率振幅:

$$C_k(t) = \mathcal{L}^{-1}[L_k(S)] \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L_k(S) e^{St} dS \quad (51)$$

如果与上节取同样的例子, 对于一个不等间距的四能级多光子跃迁情况, 这时三光子跃迁的几率振幅为:

$$C_4(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(-1)^{4-1} i a_1 a_2 a_3}{S^4 + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) S^2 + a_1^2 a_3^2} \right] \quad (52)$$

(52)式中若令 $a_1 = a_2 = a_3 = -p$, 便过渡到等间距四能级的表示式(38)。容易根据(51)式写下 $C_3(t)$ 及 $C_2(t)$ 的变换式为:

$$\left. \begin{aligned} C_3(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(-1)^{3-1} i a_1 a_2 S}{S^4 + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) S^2 + a_1^2 a_3^2} \right] \\ C_2(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(-1)^{2-1} i a_1 (S^2 - a_3^2)}{S^4 + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) S^2 + a_1^2 a_3^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

令:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 3\bar{a}^2 \quad a_1^2 a_3^2 = \bar{b}^2 \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} [3\bar{a}^2 + (9\bar{a}^4 - 4\bar{b}^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} \\ \beta &= \frac{1}{\sqrt{2}} [3\bar{a}^2 - (9\bar{a}^4 - 4\bar{b}^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

再应用(39)式关系便可得:

$$\left. \begin{aligned} C_2(t) &= \frac{-i a_1}{\beta^2 - \alpha^2} \\ &\times \left\{ \frac{a_3^2 + \beta^2}{\beta} \sin \beta t - \frac{a_3^2 + \alpha^2}{\alpha} \sin \alpha t \right\} \\ C_3(t) &= \frac{i a_1 a_2}{\beta^2 - \alpha^2} \{ \cos \alpha t - \cos \beta t \} \\ C_4(t) &= \frac{-i a_1 a_2 a_3}{\alpha \beta (\alpha^2 - \beta^2)} \\ &\times \{ \alpha \sin \beta t - \beta \sin \alpha t \} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

参 考 文 献

- [1] K. Shinoda: Infrared Microwave Double Resonance, in "Laser Spectroscopy", 1974, Edited by R. G. Brewer, A. Mooradian; New York. J. I. Steinfeld, P. L. Houston; Double-Resonance Spectroscopy, in "Laser and Coherence Spectroscopy", 1978, Edited by J. I. Steinfeld, New York.
- [2] Z. Bialynicke-Birula *et al.*; *Phys. Rev. A*, 1977, **16**, 2038.
- [3] J. H. Eberly *et al.*; *Phys. Rev. A*, 1977, **16**, 2048.
- [4] R. J. Cook, B. W. Shore; *Phys. Rev. A*, 1979, **20**, 539. B. W. Shore, J. H. Eberly; *Opt. Commun.*, 1978, **24**, No. 1, 83.
- [5] A. Schenzle, R. G. Brewer; "Generalized Two Photon Theory", in "Physics Reports Reprint Book" Series **3**, ed. by Willis E. Lamb, Jr., 1978, North-Holland publishing company.
- [6] R. Loudon, «The Quantum Theory of Light», 1978, 174, London.
- [7] G. E. Roberts, H. Kaufman; «Table of Laplace Transforms», 1966, 196, London.
- [8] R. G. Harrison, S. R. Butcher; *Contemp. Phys.*, 1980, **21**, No. 1, 19~41.