中国激光
第10卷 第10期

由光学布洛赫方程讨论连续激光振荡过程

李 长 江

(北京化工学院)

提要：本文利用光学布洛赫方程的稳态解，讨论连续激光振荡过程。所得到的激光物质的增益和饱和效应、色散和频率牵引的理论公式与兰姆半经典理论中，密度矩阵非对角元的三阶解理论结果完全一致。但这一方法简化了数学过程。

Discussion on CW laser oscillation process via optical Bloch equations

Li Changjiang

(Beijing Institute of Chemical Technology)

Abstract: This paper discusses the CW laser oscillation process using the stationary state solutions of the optical Bloch equations. The derived formulas on gain and saturation effect, dispersion and frequency pulling of the laser material agree with the results obtained by the third order approximation of the non-diagonal element of density mátrix in Lamb's semi-classical theory and this method simplifies the mathematical processes.

一、引 言

在激光振荡的兰姆半经典理论中，密度矩阵的一阶解理论只能给出激光振荡的阈值条件。为了描述在阈值以上大信号情况下的增益饱和特性，则必须用迭代法求解密度矩阵非对角元的三阶解，数学运算过程十分繁复[1]。

将系综的密度矩阵元运动方程作适当组合变换和旋波近似，得到的光学布洛赫方程不仅是研究相干光学瞬态过程的基础[2]，而且最近也有人从这一方程出发来研究激光振荡过程[3]。本文通过光学布洛赫方程的稳态解讨论具有均匀增宽谱线和具有非均匀增宽谱线的激光物质的增益和饱和效应、色散和频率牵引，其结果与密度矩阵的三阶解理论一致；而布洛赫方程的稳态解很容易通过代数运算求得。

二、布洛赫方程及布洛赫矢量的物理意义

对于由大量非简并二能级原子系统组成的混合态系综，在近共振、准单色光波场

$$E(z,\ t)=E_0\cos(\omega t-kz) \tag{1}$$

作用下，其密度矩阵 ρ 的运动方程为

$$i\hbar\dot{\rho}=[H,\ \rho], \tag{2}$$

这里暂未考虑态的衰减。H 为原子系统的

收稿日期：1982年9月8日。

哈密顿量,在电偶极近似下,

$$H=\begin{vmatrix} \hbar\omega_1 & -\mu_{12}E_0\cos(\omega t-kz) \\ -\mu_{21}E_0\cos(\omega t-kz) & \hbar\omega_2 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

其中, $\mu_{12}=\langle 1|\mu|2\rangle=\mu_{21}$

为原子系统的电偶极矩阵元。对密度矩阵非对角元作如下变换:

$$\rho_{12}=\tilde{\rho}_{12}e^{i(\omega t-kz)}, \tag{4a}$$

$$\rho_{21}=\tilde{\rho}_{21}e^{-i(\omega t-kz)}, \tag{4b}$$

并作旋波近似,并引入矢量 $\boldsymbol{B}(u, v, w)$, 其中

$$u=\tilde{\rho}_{21}+\tilde{\rho}_{12}, \tag{5a}$$

$$v=\mathrm{i}(\tilde{\rho}_{21}-\tilde{\rho}_{12}), \tag{5b}$$

$$w=\rho_{22}-\rho_{11}。 \tag{5c}$$

则由密度矩阵方程可得矢量 $\boldsymbol{B}$ 的分量运动方程

$$\dot{u}=\Omega v-\frac{u}{T_2}, \tag{6a}$$

$$\dot{v}=-\Omega u+\omega_r w-\frac{v}{T_2}, \tag{6b}$$

$$\dot{w}=-\omega_r v-\frac{w-w^\circ}{T_1}, \tag{6c}$$

其中

$$\Omega=\omega-\omega_{21}-kv_z, \tag{7}$$

上式中 $\omega_{21}=\omega_2-\omega_1$, kv_z 为运动原子在 z 方向的速度分量引起的多普勒频移。而

$$\omega_r=\frac{\mu_{12}E_0}{\hbar} \tag{8}$$

为 Rabi 翻转频率。$w^\circ=\rho_{22}^\circ-\rho_{11}^\circ$, ρ_{11}° 和 ρ_{22}° 分别为系综处在平衡状态或存在非相干激发时原子处在能级 1 和 2 上的几率。(6) 式中引入了由纵向弛豫时间 T_1 和横向弛豫时间 T_2 表示的唯象阻尼项。进一步可将(6)式归纳为

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\beta}-\frac{\boldsymbol{i}u+\boldsymbol{j}v}{T_2}-\frac{\boldsymbol{k}(w-w^\circ)}{T_1}, \tag{9}$$

上式即为光学布洛赫方程, $\boldsymbol{B}$ 为布洛赫矢量, 而

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{i}\omega_r+\boldsymbol{k}\Omega=[\omega_r,\ 0,\ \Omega] \tag{10}$$

为有效场。

$\boldsymbol{B}$ 为抽象的三维数学空间中的矢量, 其各分量有着明确的物理意义。由感应极化强度的表达式

$$\begin{aligned} P&=NT_r(\rho\mu) \\ &=N\mu_{12}[u\cos(\omega t-kz)-v\sin(\omega t-kz)] \end{aligned} \tag{11}$$

可以看出(这里 N 为原子总数), 布洛赫矢量的横向分量 u 和 v 分别与感应极化强度中与外场同相的分量和正交的分量成正比。将式(5c)两边同乘以 N 得:

$$Nw=N(\rho_{22}-\rho_{11})=N_2-N_1=\Delta N。 \tag{12}$$

可见纵向分量 w 与系综中处于能级 2 和 1 上的原子数差,或反转原子数 ΔN 成正比。

三、激光物质的增益与色散

将极化强度用复极化率 $\chi=\chi'+i\chi''$ 表示为电场的线性函数,有

$$\begin{aligned} P=&\varepsilon_0\chi' E_0\cos(\omega t-kz) \\ &-\varepsilon_0\chi'' E_0\sin(\omega t-kz)。 \end{aligned} \tag{13}$$

比较(11)、(13)两式,可得

$$N\mu_{12}u=\varepsilon_0\chi' E_0, \tag{14a}$$

$$N\mu_{12}v=\varepsilon_0\chi'' E_0。 \tag{14b}$$

可见, u、v 分别与复极化率的实部 χ' 和虚部 χ'' 成正比,进一步通过关系式:

$$G=\frac{\omega}{c}\chi'', \tag{15}$$

$$n=1+\frac{1}{2}\chi', \tag{16}$$

可以把 u、v 直接同物质的增益(或吸收)系数 G 和折射率 n 联系起来:

$$G=\frac{N\mu_{12}\omega}{c\varepsilon_0 E_0}v, \tag{17}$$

$$n=1+\frac{N\mu_{12}}{2\varepsilon_0 E_0}u。 \tag{18}$$

所以只要由布洛赫方程求解 u 和 v, 就可由(17)、(18)式求得 G 和 n 的理论表达式。在稳态情况下,布洛赫方程的解可由方程(6)等于零求得:

$$u=\frac{\omega_r\Omega}{\Omega^2+T_2^{-2}(1+S)}w^\circ,\qquad(19a)$$

$$v=\frac{\omega_r T_2^{-1}}{\Omega^2+T_2^{-2}(1+S)}w^\circ,\qquad(19b)$$

$$w=\frac{\Omega^2+T_2^{-2}}{\Omega^2+T_2^{-2}(1+S)}w^\circ,\qquad(19c)$$

其中参量

$$S=\omega_r^2T_1T_2。\qquad(20)$$

将(19)各式分别代入(18)、(17)和(12)式,并考虑到 $\omega_r=\frac{\mu_{12}E_0}{\hbar}$,得

$$G=\frac{\mu_{12}^2\omega}{c\varepsilon_0\hbar}\cdot\frac{T_2^{-1}}{\Omega^2+T_2^{-2}(1+S)}\Delta N^\circ,\qquad(21)$$

$$n=1+\frac{\mu_{12}^2}{2\varepsilon_0\hbar}\cdot\frac{\Omega}{\Omega^2+T_2^{-2}(1+S)}\Delta N,\qquad(22)$$

$$\Delta N=\frac{\Omega^2+T_2^{-2}}{\Omega^2+T_2^{-2}(1+S)}\Delta N^\circ,\qquad(23)$$

其中 $\Delta N^\circ=Nw^\circ$, 为热平衡状态或存在非相干激发时系综中处于能级 2 和 1 上的原子数之差。当参量 $S\ll1$ 时,(21)～(23)式变为

$$G^\circ=\frac{\mu_{12}^2\omega}{c\varepsilon_0\hbar}\cdot\frac{T_2^{-1}}{\Omega^2+T_2^{-2}}\Delta N^\circ,\qquad(24)$$

$$n^\circ=1+\frac{\mu_{12}^2}{2\varepsilon_0\hbar}\cdot\frac{\Omega}{\Omega^2+T_2^{-2}}\Delta N^\circ,\qquad(25)$$

$$\Delta N^\circ=\Delta N^\circ。\qquad(26)$$

(24)～(26)式分别为小信号近似下的增益、色散和反转原子数的表达式。

当 S 同 1 相比不能忽略时,增益 G 和反转原子数 ΔN 均比小信号时小。可见参量 S 描述了饱和特性,可称为饱和参量,是无量纲的量。饱和条件可由 $S\geqslant1$ 给出。假设 $T_1=T_2$, 由(8)和(20)式得饱和条件为

$$\frac{\mu_{12}E_0}{\hbar}\geqslant T_2^{-1}。\qquad(27)$$

上式表明,当由 Rabi 翻转频率表征的原子系统在光波场的作用下, 状态变化的速率大于因自发辐射或无规碰撞等弛豫过程造成的衰减速率时, 增益和反转原子数将明显出现饱和。光波场越强,状态变化速率越快,饱和效应越显著。

四、均匀增宽的情形

对静止原子或多普勒频移可以忽略的情况,$\Omega=\omega-\omega_{21}$, 由(24)式得均匀增宽小信号增益系数

$$G_h^\circ(\omega)=\frac{\pi\mu_{12}^2\omega}{c\varepsilon_0\hbar}\Delta N^\circ g_h(\omega,\omega_{21}),\qquad(28)$$

其中,

$$g_h(\omega,\ \omega_{21})=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\Delta\omega}{(\omega-\omega_{21})^2+(\Delta\omega)^2}$$

为均匀增宽谱线的洛仑兹线型函数,$\Delta\omega=T_2^{-1}$ 是增益曲线的半最大值半宽度。在准确共振的情况下,$\omega=\omega_{21}$, 由(28)式得

$$G_h^\circ(\omega_{21})=\frac{\mu_{12}^2\omega_{21}}{c\varepsilon_0\hbar\Delta\omega}\Delta N^\circ。\qquad(29)$$

由(21)式得均匀增宽大信号增益系数

$$G_h(\omega)=G_h^\circ(\omega_{21})\frac{(\Delta\omega)^2}{(\omega-\omega_{21})^2+(\Delta\omega)^2(1+S)},\qquad(30)$$

此时,增益曲线的等效半宽度

$$\delta\omega=\Delta\omega(1+S)^{1/2}。\qquad(31)$$

可见增益随饱和参量 S 的增加而减小, 且饱和行为与频率有关,偏离中心频率越远,饱和效应越弱。在中心频率处,

$$G_h(\omega_{21})=\frac{G_h^\circ(\omega_{21})}{1+S}。\qquad(32)$$

由(22)式得具有均匀增宽谱线的激光物质在中心频率附近的色散关系为:

$$n_h(\omega)=1+\frac{\mu_{12}^2}{2\varepsilon_0\hbar}\times\frac{\omega-\omega_{21}}{(\omega-\omega_{21})^2+(\Delta\omega)^2(1+S)}\Delta N^\circ,\qquad(33)$$

把色散同增益系数联系起来得:

$$n_h(\omega)=1+\frac{c(\omega-\omega_{21})}{2\omega\Delta\omega}G_h(\omega)。\qquad(34)$$

在阈值条件下, 由色散引起的线性频率牵引

$$\omega'-\omega=\frac{\Delta\omega_c}{\Delta\omega}(\omega_{21}-\omega)。\qquad(35)$$

上式中的 ω' 为有源腔的纵模频率，$\Delta\omega_c$ 为无源腔的半宽度。(35)式表明，在均匀增宽情况下频率牵引与功率无关。

五、非均匀增宽的情形

对于运动原子，多普勒频移不能忽略时，应考虑具有各种速度的全部原子对增益的贡献。假设处于高、低能级上的原子具有相同的热运动速度分布，并利用多普勒极限近似，由(24)式求得非均匀增宽小信号增益系数

$$G_i^{\circ}(\omega)=\frac{\pi\mu_{12}^2\omega}{c\varepsilon_0\hbar}\,\Delta N^{\circ} g_i(\omega,\ \omega_{21}),\tag{36}$$

其中

$$g_i(\omega,\ \omega_{21})=\frac{1}{\Delta\omega_D}\left(\frac{\ln 2}{\pi}\right)^{1/2}e^{-\frac{(\omega-\omega_{21})^2}{(\Delta\omega_D)^2}\ln 2}$$

是非均匀增宽谱线的高斯线型函数，而

$$\Delta\omega_D=\frac{\omega_{21}}{c}\left(\frac{2k_BT}{m}\ln 2\right)^{1/2}\tag{37}$$

为多普勒半宽度，k_B 为玻尔兹曼常数，T 为绝对温度，m 为原子质量。在中心频率 $\omega=\omega_{21}$ 处有

$$G_i^{\circ}(\omega_{21})=\frac{\mu_{12}^2\omega}{c\varepsilon_0\hbar\Delta\omega_D}(\pi\ln 2)^{1/2}\Delta N^{\circ}。\tag{38}$$

由(21)式得在多普勒极限近似下的非均匀增宽大信号增益系数

$$G_i(\omega)=\frac{G_i^{\circ}(\omega_{21})}{(1+S)^{1/2}}e^{-\frac{(\omega-\omega_{21})^2}{(\Delta\omega_D)^2}\ln 2}。\tag{39}$$

可见增益随饱和参量 S 的增加而减小，但与均匀增宽相比，饱和效应的强度与频率无关。在中心频率处

$$G_i(\omega_{21})=\frac{G_i^{\circ}(\omega_{21})}{(1+S)^{1/2}}。\tag{40}$$

由(22)式得非均匀增宽谱线的激光物质在中心频率附近的色散关系为

$$n_i(\omega)=1+\frac{\mu_{12}^2(\omega-\omega_{21})}{\varepsilon_0\hbar(\Delta\omega_D)^2}\ln 2 \times\Delta N^{\circ}e^{-\frac{(\omega-\omega_{21})^2}{(\Delta\omega_D)^2}\ln 2},\tag{41}$$

或

$$n_i(\omega)=1+\frac{c(\omega-\omega_{21})}{\omega\Delta\omega_D}\times\left(\frac{\ln 2}{\pi}\right)^{1/2}(1+S)^{1/2}G_i(\omega)。\tag{42}$$

相应地，在阈值条件下的频率牵引为

$$\omega'-\omega=\frac{\Delta\omega_C}{\Delta\omega_D}\times 2\left(\frac{\ln 2}{\pi}\right)^{1/2}(1+S)^{1/2}(\omega_{21}-\omega)。\tag{43}$$

可见在非均匀增宽情况下，频率牵引与功率有关。在小信号情况下，牵引量比均匀增宽时多了一个因子：$2\left(\frac{\ln 2}{\pi}\right)^{1/2}\approx 0.939$。

参 考 文 献

[1] 周炳琨等；《激光原理》，国防工业出版社，1980，p. 156～196。

[2] R.G.Brewer; "Frontiers in Laser Spectroscopy", 1, R.Balian *et al.*; Ed., North-Holland Pub.Co., 1977, P.341～398。

[3] O. Svelto; "Principles of Laser", D. C.Hanna Tr. Plenum. Press, 1976, p.301.