中国激光
第10卷 第1期

闪耀光栅对厄米-高斯光束的衍射

郑 辉

(中国科学院上海光机所)

提要：本文解析了闪耀光栅对厄米-高斯光束的方和费衍射分布，发现光栅对厄米-高斯光束衍射的分辨本领并不取决于光栅处的光斑尺寸，而是由光束本身的参量——光腰截面半径决定的。

Diffraction of a blazed grating illuminated with a Hermit-Gaussian beam

Zheng Hui

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: The Fraunhofer diffraction distribution from a blazed grating illuminated with Hermit-Gaussian beams is investigated analytically. It is found that the resolution of the grating illuminated with a Hermit-Gaussian beam is not determined by the spot size on the grating but by the parameter of the beam itself, i. e. the radius of the beam waist section.

由于大多数激光光束都是厄米-高斯型场分布(或拉盖尔-高斯型)，而一般讨论有关衍射问题多是采用均匀分布的平面波或球面波，自然会提出用厄米-高斯光束与均匀平面波在处理一些衍射问题时有无差别的问题。Olaofe、Schell[1] 等人讨论过拉盖尔-高斯光束的圆孔衍射问题；Dombrovskii[2] 等人讨论过高斯分布的参考光束对全息图再现的影响。光栅对均匀平面波衍射已是众所周知的[3]，但光栅对厄米-高斯光束的衍射问题却还未见报导。本文利用 Fourier 变换得到闪耀光栅的方和费衍射场分布，给出各种模式的光栅方程及分辨本领。并发现光栅分辨本领不像通常用均匀平面波照射光栅时分辨本领取决于光栅处光斑尺寸(分辨本领等于光栅上被照明的刻槽总数乘以衍射级)，而是由光束本身的参量——光腰截面尺寸决定。

一、公式推导

为了处理方便，本文只考虑入射光束的光轴方向垂直于光栅刻槽方向的情况，闪耀光栅及各种坐标的选取如图 1。设闪耀光栅周期为 d，刻槽宽度为 d_1，刻槽角(闪耀角)为 α。选取 (x, z) 坐标，使 z 轴为光栅的法线方向，x 轴沿光栅面；选取 (x', z') 坐标，使 x' 轴沿刻槽面方向；选取 (x'', y'') 坐标，使 z'' 为入射光的光轴方向。光栅中心 O_1 也是 (x, z) 及 (x', z') 坐标原点；入射光的光腰中

收稿日期：1982年2月1日。

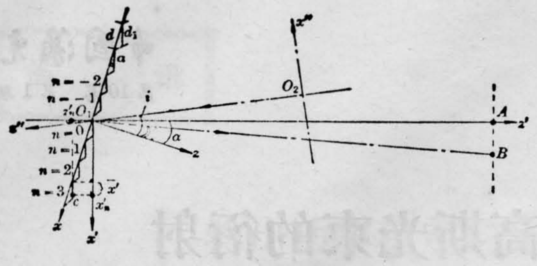

图1　光栅及坐标选取

心 O_2 是 (x'', z'') 坐标原点。设 i、θ 分别是入射角及衍射角，设从 z 轴起顺时针转动角度为正，逆时针转为负。

为了简便，本文只考虑一维情况(两维情况见附录A)。设入射光是厄米-高斯光束，第 m 个模的复振幅为[4]：

$$u_m(x'', z'') = F_m(x'', z'')e^{jkz''} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} F_m(x'', z'') &= \sqrt{\frac{1}{2^m m!}}\frac{1}{\omega(z'')} \\ &\times H_m\left(\frac{\sqrt{2}\,x''}{\omega(z'')}\right)\exp\left[-\left(\frac{x''}{\omega(z'')}\right)^2\right. \\ &\left.+\frac{jkx''^2}{2R(z'')}-j\left(m+\frac{1}{2}\right)\varphi(z'')\right] \end{aligned}$$

H_m 为厄米函数。

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z'') &= \tan^{-1}\left(\frac{\lambda z''}{\pi\omega_0^2}\right) \\ R(z'') &= z''\left[1+\left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda z''}\right)^2\right] \\ \omega^2(z'') &= \omega_0^2\left[1+\left(\frac{\lambda z''}{\pi\omega_0^2}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

$R(z'')$、$\omega(z'')$ 分别是波前曲率半径和光束截面半径。ω_0 为光腰($z''=0$ 处)截面半径。光栅中心 O_1 离开光腰中心 O_2 的距离为

$$z''_{01} = \overline{O_2O_1} = h。$$

将光栅刻槽编号如图1，各刻槽的序号用 $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$ 表示。光栅刻槽面上任一点 C 的坐标可表示为：

$$\left.\begin{aligned} x'_n &= nd\cos\alpha + \bar{x}' \\ z'_n &= -nd\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中 $\bar{x}'$ 为光栅面上任一点在其所在的槽面内的相对位置，如图1所示，$0\leqslant\bar{x}'\leqslant d_1$。不难证明坐标系 (x', z') 与 (x'', z'') 的关系为：

$$\left.\begin{aligned} x''_n &= -x'_n\cos(i-\alpha) - z'_n\sin(i-\alpha) \\ z''_n &= x'_n\sin(i-\alpha) - z'_n\cos(i-\alpha) + h \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

用 (x'', z'') 坐标表示光栅第 n 个刻槽面上任一点的坐标为：

$$\left.\begin{aligned} x''_n &= -nd\cos i - \bar{x}'\cos(i-\alpha) \\ z''_n &= nd\sin i + \bar{x}'\sin(i-\alpha) + h \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

将(4)式代入(1)式得：

$$u_m(x''_n, z''_n) = u_m(\bar{x}', n) \tag{5}$$

即光栅上第 n 个刻槽面上任意一点的光场分布。由(1)式知 $F_m(x''_n, z''_n)$ 是 x''_n, z''_n 的缓变函数，完全可以忽略(4)式中含 $\bar{x}'$ 的项，则有：

$$\begin{aligned} F_m(x''_n, z''_n) &= F_m(-nd\cos i,\ nd\sin i + h) \\ &\approx F_m(-nd\cos i,\ h) \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^m m!}}\frac{1}{\omega(h)}H_m\left(-\frac{\sqrt{2}\,nd\cos i}{\omega(h)}\right) \\ &\times\exp\left[-\left(\frac{nd\cos i}{\omega(h)}\right)^2 + j\frac{k(nd\cos i)^2}{2R(h)}\right. \\ &\left.-j\left(m+\frac{1}{2}\right)\varphi(h)\right]。 \end{aligned} \tag{6}$$

如果观察点 $B(x'_B, z'_B)$ 是在方和费区，射其衍场分布 $\tilde{u}(x'_B, z'_B)$ 为光栅表示场分布 $u_m(\bar{x}'n)$ 的 Fourier 变换：

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x_B, z'_B) \Rightarrow \tilde{u}_m(\theta) &= \frac{e^{jkz'_B + jkx'^2_B/2z'_B}}{j\lambda z'_B} \\ &\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{d_1} u_m(\bar{x}', n) \\ &\times\exp\{-jk[\sin(\alpha-\theta)x'_n(\bar{x}', n) \\ &+\cos(\alpha-\theta)z'_n(\bar{x}'n)]\}d\bar{x}' \end{aligned} \tag{7}$$

将(2)与(5)式代入(7)式得：

$$\begin{aligned} \tilde{u}_m(\theta) &= S(\theta)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{2^m m!}}\frac{1}{\omega(h)} \\ &\times H_m\left(-\frac{\sqrt{2}\,nd\cos i}{\omega(h)}\right)\exp\left\{-\left(\frac{nd\cos i}{\omega(h)}\right)^2\right. \\ &+jk\frac{(nd\cos i)^2}{2R(h)} \\ &\left.+jn[kd(\sin i + \sin\theta) - 2\pi M]\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$S(\theta)=\frac{d_1}{j\lambda z'_B}\ \mathrm{sinc}\left\{\frac{kd_1}{2}[\sin(i-\alpha)+\sin(\theta-\alpha)]\right\}\times\exp\left\{jkz'_B+\frac{jkx'^2_B}{2z'_B}+\frac{jkd_1}{2}[\sin(i-\alpha)+\sin(\theta-\alpha)]+j\left(m+\frac{1}{2}\right)\varphi(h)\right\}。$$

(8)式中 M 是整数。(8) 式右端求和号中由于含有 $\exp\left[-\left(\frac{nd\cos i}{\omega(h)}\right)^2\right]$ 一项，所以实际上对 $\tilde{u}_m(\theta)$ 有贡献的 n 只是满足 $|nd\cos i|$ 小于几倍 $\omega(h)$ 的那些 n 值。下面说明(8)式对 n 求和可以用对 n 积分来代替。先给出几个量的数量级概念：$d\cos i$ 一般是波长数量级，$nd\cos i$ 最大是光栅的尺寸且近似为 $\omega(h)$ 的数量级。求和号中的 H_m 是 $\left(\frac{\sqrt{2}\,nd\cos i}{\omega(h)}\right)$ 的缓变函数，当 n 变化1时，$\frac{\sqrt{2}\,nd\cos i}{\omega(h)}$ 的变化量 $\frac{\sqrt{2}\,d\cos i}{\omega(h)}\ll 1$，所以 H_m 的变化也远小于1；当 n 变化1时，指数项 $\exp\left[-\left(\frac{nd\cos i}{\omega(h)}\right)^2\right]$ 的变化量正比于 $\frac{d\cos i}{\omega(h)}\sim\frac{\lambda}{\omega(h)}\ll 1$，指数项 $\exp\left[jk\frac{(na\cos i)^2}{2R(h)}\right]$ 的变化量正比于 $\frac{n(d\cos i)^2}{\lambda R(h)}\sim\frac{(nd\cos i)(d\cos i)}{\lambda h\left[1+\left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda h}\right)^2\right]}\sim\frac{nd\cos i}{h+\left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}\right)^2\Big/h}$，在 $h=\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}$ 时，这个量取极大且等于 $\frac{nd\cos i}{\omega_0}\times\frac{\lambda}{\omega_0}\sim\frac{\lambda}{\omega_0}\ll 1$。再看(8)式最后一项 $\exp\{jn[kd(\sin i+\sin\theta)-2\pi M]\}$，当 n 变化1时，其变化量正比于 $kd(\sin i+\sin\theta)-2\pi M$。设 $\theta=\theta_0$，θ_0 满足

$$kd(\sin i+\sin\theta_0)-2\pi M=0,$$

这正好是光栅方程，实际上只有当 θ 在 θ_0 的附近很小的范围内光强才不为零，$\theta-\theta_0$ 的范围大致为衍射角的范围 $\sim\frac{\lambda}{\omega_0}$，这样

$$kd(\sin i+\sin\theta)-2\pi M\sim\frac{d\cos\theta_0}{\lambda}\times\frac{\lambda}{\omega_0}\sim\frac{\lambda}{\omega_0}\ll 1。$$

以上讨论可知当 n 变化1时，(8)式求和号中的各项的变化量都是足够小的，因此(8)式对 n 的求和完全可以用对 n 的积分来代替。最后我们得方和费区某观察点 B 处的光场分布为：

$$\tilde{u}_m(\theta)=\frac{d_1}{d\cos i}\frac{je^{j\psi}}{z'_B\lambda}(-1)^{-\frac{m}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2^m m!}}\times\left[1+\left(\frac{\lambda h}{\pi\omega_0^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{4}}\times\mathrm{sinc}\left\{\frac{\pi d_1}{\lambda}[\sin(i-\alpha)+\sin(\theta-\alpha)]\right\}\times H_m\left\{\sqrt{2}\,\frac{\pi\omega_0}{d\cos i}\left[M-\frac{d}{\lambda}(\sin i+\sin\theta)\right]\right\}\exp\left\{-\left(\frac{\pi\omega_0}{d\cos i}\right)^2\times\left[M-\frac{d}{\lambda}(\sin i+\sin\theta)\right]^2\right\}\tag{9}$$

其中

$$\psi=kz'_B+\frac{kx'^2_B}{2z'_B}+\frac{kd_1}{2}[\sin(i-\alpha)+\sin(\theta-\alpha)]-\left(\frac{\pi\omega_0^2}{d\cos i}\right)^2\times\left[M-\frac{d}{\lambda}(\sin i+\sin\theta)\right]^2\tan\varphi(h)。$$

二、讨　论

(9)式等号右边第一个因子 $\frac{d_1}{d\cos i}$ 是对 B 点处有贡献的衍射光与射到光栅表面光振幅之比；第二个因子 $je^{j\psi}/z'_B$ 表示球面波；sinc 函数给出衍射场分布的包络线，它的极值位置对应于光栅的闪耀方向。由 sinc 函数第一个零点给出包络线的半宽度为：$\frac{\lambda}{d_1\cos(i-\alpha)}$，它决定了闪耀角的范围。

下面讨论(9)式右边最后两个因子——厄米多项式与指数函数项。将(9)式写成：

$$\tilde{u}_m(\theta)\Rightarrow AH_m(g)e^{-\frac{g^2}{2}}=\tilde{u}_m(g)$$

$$g\equiv\frac{\sqrt{2}\,\pi\omega_0}{d\cos i}\left[M-\frac{d}{\lambda}(\sin i+\sin\theta)\right]\tag{10}$$

利用(10)式可以讨论光栅方程及分辨本领等问题。

1．光栅方程

光强极大值位置应满足下述方程:

$$\frac{d}{dg}\tilde{u}_m^2(g)=0,$$

利用厄米多项式性质得极值的条件为:

$$H_{m+1}(g)=gH_m(g) \qquad (11)$$

下面分别讨论对不同的 TEM 模光栅方程.

(i) TEM_{00} 模，对应于一维 $m=0$ 的情况，则衍射强度最大值的位置应满足方程:

$$d(\sin i+\sin\theta_0)=M\lambda \qquad (12)$$

此式即为光栅方程。M 为衍射级。所以对于 TEM_{00} 模，光栅方程与均匀平面波的光栅方程完全一样。

(ii) 对 TEM_{10} 模，对应一维 $m=1$，由(11)式得:

$$d(\sin i+\sin\theta)-M\lambda=\pm\frac{\lambda d\cos i}{\sqrt{2}\,\pi\omega_0} \qquad (13)$$

上式有两个位置光强取极大值。取 θ_0 为满足光栅方程(12)式的衍射角，则取极大值位置 θ 分别偏离 θ_0 为:

$$\theta-\theta_0=\Delta\theta=\pm\frac{\lambda}{\sqrt{2}\,\pi\omega_0}\frac{\cos i}{\cos\theta} \qquad (14)$$

(iii) TEM_{20} 模，对一维 $m=2$，由(11)式得:

$$d(\sin i+\sin\theta)-M\lambda=\begin{cases}0\\ \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}\dfrac{\lambda d\cos i}{\pi\omega_0}\end{cases} \qquad (15)$$

(15)式说明一个极值正好在 θ_0 的位置，另两个极值分别偏离 θ_0 为

$$\Delta\theta=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{\lambda}{\pi\omega_0}\frac{\cos i}{\cos\theta_0}。$$

从上面分析可知，高阶模经光栅衍射后有几个极值位置，每个极值的位置对 $m=1$，2 分别由(13)、(15)式确定。但衍射光束中心线的方位仍与 TEM_{00} 模相同满足光栅方程(12)式。

2．厄米-高斯光束被光栅衍射后在方和费区的光强分布仍是厄米-高斯型。将(9)式场分布在 θ_0 附近展开后变为如下形式:

$$\tilde{u}_m(\Delta\theta)=A'\,\mathrm{sinc}\left\{\frac{\pi d_1}{\lambda}[\sin(i-\alpha)+\sin(\theta_0-\alpha)+\cos(\theta_0-\alpha)\Delta\theta]\right\}\times H_m\left(\frac{\sqrt{2}\,\pi\omega_0\cos\theta_0}{\lambda\cos i}\Delta\theta\right)e^{-\left(\frac{\pi\omega_0\cos\theta_0}{\lambda\cos i}\Delta\theta\right)^2}$$

由于 sinc 函数的角半径 $\dfrac{\lambda}{d_1\cos(\theta_0-\alpha)}\gg$ 高斯函数的角半径 $\dfrac{\lambda\cos i}{\pi\omega_0\cos\theta_0}$，所以可忽略上式中 sinc 函数中含 $\Delta\theta$ 的一项。$\tilde{u}_m(\Delta\theta)$ 可写为:

$$\tilde{u}_m(\Delta\theta)=AH_m\left(\frac{\sqrt{2}\,\pi\omega_0\cos\theta_0\Delta\theta}{\lambda\cos i}\right)e^{-\left(\frac{\pi\omega_0\cos\theta_0\Delta\theta}{\lambda\cos i}\right)^2} \qquad (16)$$

其中 A 是与 $\Delta\theta$ 无关的常数。

如果光栅是采用利特罗自准形式(即衍射方向为逆入射方向)，则

$$\tilde{u}_m(\Delta\theta)=AH_m\left(\frac{\sqrt{2}\,\pi\omega_0\Delta\theta}{\lambda}\right)e^{-\left(\frac{\pi\omega_0\Delta\theta}{\lambda}\right)^2},$$

将 $\Delta\theta$ 用方和费区 B 点坐标 $(x'_B,\ z'_B)$ 表示:

$$\theta-\theta_0=\Delta\theta\approx x'_B/z'_B。$$

因在方和费区 $\omega_0^2/\lambda z'_B\ll1$，所以

$$\omega(z'_B)=\omega_0\sqrt{1+\left(\frac{\lambda z'_B}{\pi\omega_0^2}\right)^2}\approx\frac{\lambda z'_B}{\pi\omega_0}。$$

这样(16)式最后可写为如下形式:

$$\tilde{u}_m(x'_B)=AH_m\left(\frac{\sqrt{2}\,x'_B}{\omega(z'_B)}\right)e^{-\left(\frac{x'_B}{\omega(z'_B)}\right)^2} \qquad (17)$$

以(17)式与(1)式的 $u_m(x'',\ z'')$ 相比可知:厄米-高斯光束经过光栅衍射后在方和费区其强度分布仍为厄米-高斯形式。这与 Fourier 光学中:厄米-高斯函数的 Fourier 变换仍为厄米-高斯函数的结论是一致的。

3．以厄米-高斯光束入射时，衍射光栅的分辨本领:

(i) 对于 TEM_{00} 模，由光栅方程

$$d(\sin i+\sin\theta_0)=M\lambda_0$$

其中 λ_0 为满足光栅方程的波长，可得

$$d\cos\theta_0\,\Delta\theta=M\Delta\lambda,$$

代入(16)式得:

$$\tilde{u}_0(\Delta\lambda) = A e^{-\left(\frac{\pi\omega_0}{d\cos i} M \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2} \tag{18}$$

由此求得光栅分辨本领为:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = M \frac{\pi\omega_0}{d\cos i} \tag{19}$$

为了说明厄米-高斯光束被光栅衍射的特点，下面给出均匀分布的平面波被光栅衍射的场分布及分辨本领[3]。衍射场为:

$$\tilde{u}(\Delta\lambda) \sim \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{2a}{d\cos i} M \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right) = \frac{\sin\left(\pi \frac{2aM}{d\cos i}\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)}{\pi \frac{2aM}{d\cos i}\frac{\Delta\lambda}{\lambda}} \tag{20}$$

分辨本领为

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = M \frac{2a}{d\cos i} \tag{21}$$

(21)式中 a 是均匀平面波光束截面半径。图2绘出光栅分别对均匀平面波和对厄米-高斯光束的方和费衍射场振幅与 $\Delta\lambda$ 的关系(为方便取横坐标为 $\left(M\frac{\pi\omega_0}{d\cos i}\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$)，为比较，我们选取均匀平面波的孔径 $2a=\pi\omega_0$。由图2可见均匀平面波被光栅衍射后有正负相间的次峰结构，但厄米-高斯光束被光栅衍射后却是平滑的。

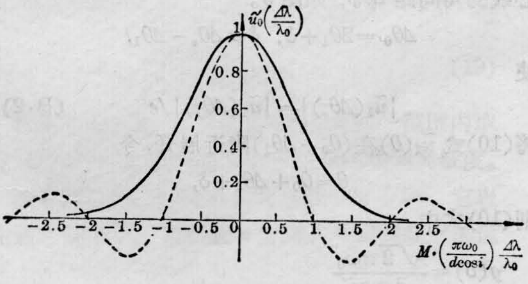

图 2　衍射场的相对振幅与 $\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0$ 的关系

实线——表示由(18)式绘出的以高斯光束入射时光栅的方和费衍射场;

虚线——表示由(20)式绘出的以均匀平面波入射时光栅的方和费衍射场

比较(19)式与(21)式可知厄米-高斯光束照射光栅，光栅的分辨本领等于孔径为 $2a=\pi\omega_0$ 的均匀平面光照射光栅时光栅的分辨本领。再看(21)式，用均匀平面波照射，光栅分辨本领等于被照明的光栅条数$\left(\frac{2a}{d\cos i}\right)$乘以衍射级 M，但对高斯光束来说，这个规律并不成立。从图1可见光栅处的光束半径是 $\omega(h)$，对厄米-高斯光束，光栅的分辨本领 $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \neq M\frac{\pi\omega(h)}{d\cos i}$，而是 $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = M\frac{\pi\omega_0}{d\cos i}$，即由光腰的截面半径 ω_0 决定。所以尽管使激光器离开光栅很远(h 很大)，使 $\omega(h)$ 增大，被照明的光栅刻线数加多，但光栅的分辨本领却无任何提高，即光栅分辨本领只决定于厄米-高斯光束的固有特性——光腰截面半径 ω_0。这一点初看起来似乎有些奇怪，但并不难理解。比较两种情况，即入射光的光腰处在光栅表面($h=0$)与入射光的光腰离光栅表面为 h 的两种情况。后者在光栅上的光束截面 $\omega(h)$ 比前者 ω_0 大$\left(1+\left(\frac{h\lambda}{\pi\omega_0^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$倍，这似乎使光栅的分辨率变好，但是前者入射光在光栅处的波阵面是平面，相当于以平行光入射到光栅上，而后者入射光在光栅处的波阵面是球面，相当于以不同方向的平行光入射到光栅上；入射光的角范围增大了$\left(1+\left(\frac{h\lambda}{\pi\omega_0^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$倍，引起光栅分辨率变坏，这样总合效果使得虽然从 $h=0$ 增加到 h，但不会使光栅分辨率变好。

(ii) 对于高阶模，光栅的分辨本领明显变坏(见附录B)。

三、结　论

上面结果可总结如下:

(1) 厄米-高斯光束经过光栅衍射后在方和费区仍为厄米-高斯分布。

(2) 对于 TEM_{00} 模，光栅方程与均匀平面波的相同；高阶模光栅衍射的光强为极大值的位置并不满足光栅方程，但衍射光束中心线的方位仍满足光栅方程。

(3) 对 TEM_{00} 模，光栅分辨本领等于直径为 $\pi\omega_0$ 的均匀平面波入射时光栅的分辨本领。

(4) 对厄米-高斯光束入射到光栅上，光栅的分辨本领在方和费区与射到光栅处光束截面半径 $\omega(h)$ 无直接关系，而决定于光束本身的参量——光腰截面半径 ω_0。因此，为了提高光栅分辨本领必须扩束，使光腰截面半径 ω_0 增大，而不能通过拉长距离增大 $\omega(h)$ 来提高分辨本领。

本文方法可以用来处理任意场分布的光束的光栅衍射问题。

附　录　A

对两维情况，TEM_{mn} 模可写为

$$F_m(x'', z'')F_n(y'', z'')e^{jkz''}$$

在光栅表面上，第一个因子的表达式为(6)式，可写为

$$F_m(x'', z'') \equiv F_m(n\, d\cos i, h)。$$

本文考虑入射光束光轴方向垂直于光栅刻槽方向，所以 $y''=y'$，故在 y' 方向光栅面上场分布

$$F_n=(y'', z'') \equiv F_n(y', h)$$

又因方和费区衍射场分布即为光栅表面上场分布的 Fourier 变换，因此由上面两表达式可知：两维 Fourier 变换可分成两个一维 Fourier 变换之积。在 x' 方向上的场分布由于各刻槽面光场的干涉，其变换的结果出现了正文中所述的衍射分布，但因 y' 方向上光束未被分割成小单元，$F_n(y', z'')$ 的 Fourier 变换只是反映了光束的传播过程，因此在 y' 方向上光束分布并不发生变化。

更一般的情况，即入射光与光栅刻槽不垂直情况，除发生衍射分布外还伴随反射，使衍射场空间方位发生变化，此问题本文不再考虑。

附　录　B

对于高阶模，光栅的分辨本领明显变坏，以 TEM_{10} 模（一维 $m=1$）为例说明之。根据 (16) 式有

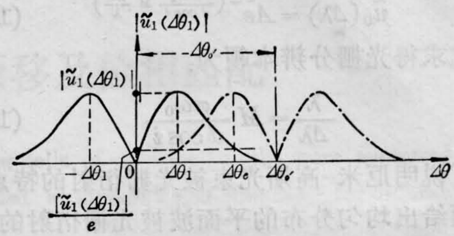

图 3　衍射场振幅绝对值与 $\Delta\theta$ 的关系

实线：对应 TEM_1 模的中心波长 $\lambda_0(\Delta\theta=0)$

虚线：对应 TEM_1 模的中心波长 $\lambda_0'(\Delta\theta=\Delta\theta_{0'})$

$$\tilde{u}_1(\Delta\theta)=AH_1\left(\frac{\sqrt{2}\,\pi\omega_0\cos\theta_0\,\Delta\theta}{\lambda\cos i}\right)\epsilon^{-(\pi\omega_0\cos\theta_0\,\Delta\theta/\lambda\cos i)^2}$$

$$=2\sqrt{2}\,A\,\frac{\pi\omega_0\cos\theta_0\,\Delta\theta}{\lambda\cos i}\,e^{-(\pi\omega_0\cos\theta_0\,\Delta\theta/\lambda\cos i)^2} \tag{B·1}$$

其中　　$\Delta\theta \equiv \theta-\theta_0$。

设 $m=1$ 模的 $\tilde{u}_1(\Delta\theta)$ 中包含两个中心波长为 λ_0 及 λ_0' 的光，图 3 绘出这两条光谱线振幅的绝对值与 $\Delta\theta=\theta-\theta_0$ 的关系。对 $\lambda=\lambda_0$(对应 $\Delta\theta=0$) 的谱线振幅取极值的位置，由(14)式得

$$\pm\Delta\theta_1=\frac{\lambda\cos i}{\sqrt{2}\,\pi\omega_0\cos\theta_0}。$$

图 3 中设 $\Delta\theta_e$ 是衍射场振幅极值的绝对值 $|\tilde{u}_1(\Delta\theta_1)|$ 降到 $|\tilde{u}_1(\Delta\theta_1)|/e$ 的位置。按照瑞利判据，如果中心波长 $\lambda=\lambda_0'$（对应 $\Delta\theta=\Delta\theta_{0'}=\theta_{0'}-\theta_0$）的衍射场振幅左峰值位置也在 $\Delta\theta_e$ 位置，则 $\Delta\lambda=\lambda_0'-\lambda_0$ 就是最小可分辨的波长差。首先求出 $\tilde{u}_1(\Delta\theta)$ 对应 λ_0 和 λ_0' 中心线的角间距 $\Delta\theta_{0'}$，如图 3。

$$\Delta\theta_{0'}=2\theta_1+\delta,\quad \delta\equiv\Delta\theta_e-\Delta\theta_1,$$

使

$$|\tilde{u}_1(\Delta\theta_e)|=|\tilde{u}_1(\Delta\theta_1)|/e \tag{B·2}$$

将(10)式 $\tilde{u}_1(\theta)$ 在 $(\theta_0+\Delta\theta_1)$ 附近展开，令

$$\theta=\theta_0+\Delta\theta_1+\delta,$$

则(10)式中

$$g(\delta)=\frac{\sqrt{2}\,\pi\omega_0}{d\cos i}\times\left\{M-\frac{d}{\lambda_0}\left[\sin i+\sin(\theta_0+\Delta\theta_1+\delta)\right]\right\}$$

再利用(13)式得

$$g(\delta)=-\frac{\sqrt{2}\,\pi\omega_0}{d\cos i}\left[\frac{d\cos i}{\sqrt{2}\,\pi\omega_0}+\frac{d}{\lambda_0}\cos(\theta_0+\Delta\theta_1)\delta\right]$$

$$=1-\frac{\sqrt{2}\,\pi\omega_0}{\lambda_0\cos i}\cos(\theta_0+\Delta\theta_1)\delta$$

把 $g(\delta)$ 代入 $\tilde{u}_1(\theta)$ 得：

$$\widetilde{u}'_1(\delta)$$

$$=AH_1\left[1+\frac{\sqrt{2}\,\pi\omega_0}{\lambda_0\cos i}\cos(\theta_0+\Delta\theta_1)\delta\right]$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\left[1+\frac{\sqrt{2}\,\pi\omega_0}{\lambda_0\cos i}\cos(\theta_0+\Delta\theta_1)\delta\right]^2}$$

$$=2A\left[1+\frac{\sqrt{2}\,\pi\omega_0}{\lambda_0\cos i}\cos(\theta_0+\Delta\theta_1)\delta\right]$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\left[1+\frac{\sqrt{2}\,\pi\omega_0}{\lambda_0\cos i}\cos(\theta_0+\Delta\theta_1)\delta\right]^2}$$

因为 $\widetilde{u}_1(\Delta\theta_e)=\widetilde{u}_1(\delta+\Delta\theta_1)=\widetilde{u}'_1(\delta)$，又将

$$\Delta\theta_1=\frac{\lambda_0\cos i}{\sqrt{2}\,\pi\omega_0\cos\theta_0}$$

代入(B·1)式得

$$\widetilde{u}_1(\Delta\theta_1)=AH_1(1)e^{-\frac{1}{2}}=2Ae^{-\frac{1}{2}}。$$

所以由(B·2)式得:

$$2A\left[1+\frac{\sqrt{2}\,\pi\omega_0}{\lambda_0\cos i}\cos(\theta_0+\Delta\theta_1)\delta\right]$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\left[1+\frac{\sqrt{2}\,\pi\omega_0}{\lambda_0\cos i}\cos(\theta_0+\Delta\theta_1)\delta\right]^2}$$

$$=2Ae^{-\frac{1}{2}}/e=2Ae^{-\frac{3}{2}} \qquad (B\cdot 3)$$

解(B·3)式(精确到 δ^2 项)得

$$\delta=\lambda_0\cos i/\sqrt{2}\,\pi\omega_0\cos(\theta_0+\Delta\theta_1),$$

故得:

$$\Delta\theta_{0'}=2\Delta\theta_1+\delta=\frac{\sqrt{2}\,\lambda_0\cos i}{\pi\omega_0\cos\theta_0}+\frac{\lambda_0\cos i}{\sqrt{2}\,\pi\omega_0\cos(\theta_0+\Delta\theta_1)}$$

$$\approx\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\lambda_0\cos i}{\pi\omega_0\cos\theta_0} \qquad (B\cdot 4)$$

(B·4)式即为 λ_0 及 λ'_0 中心线的角间距。再利用 $\Delta\theta$ 与 $\Delta\lambda$ 的关系 $\Delta\theta=\frac{M\Delta\lambda}{d\cos\theta_0}$，可求出光栅对 TEM_1 模的最小可分辨波长差:

$$\Delta\lambda=\frac{d\cos\theta_0}{M}\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\lambda_0\cos i}{\pi\omega_0\cos\theta_0}=\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\lambda_0 d\cos i}{M\pi\omega_0},$$

所以光栅对 TEM_1 模的分辨本领为:

$$\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}=\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{M\pi\omega_0}{d\cos i} \qquad (B\cdot 5)$$

将(B·5)式与(19)式相比可见光栅对 TEM_1 模的分辨本领比光栅对 TEM_0 模的分辨本领减少了 $\frac{3}{\sqrt{2}}$ 倍。对于更高阶模，光栅的分辨本领都可进行类似的计算，因此从略。

参　考　文　献

[1] G. O. Olaofe; *JOSA*, 1970, **60**, 1654; R. G. Schell *et al.*; *JOSA*, 1971, **61**, 31.

[2] V. A. Dombrovskii *et al.*; *Opt. Spectroscopy*, 1978, **45**, No. 5, 801.

[3] M. Born, E. Wolp; Principles of Optics, Pergamon Press, 1964, p. 401.

[4] S. E. Siegman; Introduction to Lasers and Masers, 1971. 6

(上接第12页)

四、讨　论

自相似传输模的计算方法，适用于光场变化较为平滑的情况。当光场变化激烈时，不能采用这种方法，若采用这种方法需另加调制因子。即该方法适合于模拟近理想光学系统的光传输。

该方法利用拉盖尔多项式求解展开系数，对于近场的快速调制，由于拉盖尔多项式中的平方项而互相抵消了，因此该方法不能给出费涅耳衍射图象。但是，该方法能够直接给出传输系统的像面和焦面附近的场分布，而且计算速度也较快，因此该方法具有一定的实用价值。

感谢本所计算机房周忠益、赵东焕等同志的协助。

参　考　文　献

[1] B. B. Aaron; *Appl. Opt.*, 1980, **19**, No. 10, 1597.

[2] R. Malone *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1975, **34**, No. 12, 721.

[3] A. E. Siegman *et al.*; *Appl. Opt.*, 1974, **13**, No. 12, 2775.

[4] 朱如曾编著;“激光物理”，国防工业出版社，1974年，p. 196.

[5] LLL Report, Laser Program Annual Report, 1976, 2～12.

[6] J. T. Hunt *et al.*; *Appl. Opt.*, 1976, **15**, No. 6, 1458.

[7] LLL Report, Laser Fusion Program Semiannal Report, 1973. 年

[8] 王桂英等;《激光》, 1981, **9**, No. 9, 57