激 光
第9卷 第9期

激光模传输的方向性

王 润 文

(中国科学院上海光机所)

提要: 用测不准关系 $\Delta S\Delta\Omega\geqslant\lambda^2$ 可以对 TEM_{00} 模激光方向性进行讨论，但却不适用于高阶模激光传输方向性的讨论。若把激光振荡看作光子在谐振腔中振荡的线性谐振子，高阶模的测不准关系便可求得，并且与已有实验结果一致。

Transmission directionality of laser modes

Wang Runwen

(Shanghai Institute of Optics and Fine Machanics, Academia Sinica)

Abstract: Uncertainty relation $\Delta S\Delta\Omega\geqslant\lambda^2$ can be used to discuss the directionality of laser light with TEM_{00} mode. But it can't be used in describing the directionality of laser light with higher order modes. If oscillation of laser light is considered as the linear harmonic oscillator of photons oscillating in a resonator the uncertainty relation of laser light with higher order modes can be obtained, and it is in agreement with the previous experimental results.

在激光若干基本问题学术讨论会上[1]提到用测不准关系来研究高斯光束传输的方向性问题时，对高阶模的情况出现了困难。本文专门来分析这一问题。通常我们引用的测不准关系有以下各种形式：$\Delta x\Delta p_x\geqslant\hbar$，$\Delta\phi\Delta J_z\geqslant\hbar$，$\Delta t\Delta E\geqslant\hbar$…… 等等都表明了微观粒子的位置与动量、转角坐标与角动量、时间的确定与能量的确定是一些成对不可同时测准的参量。如果转到光子统计学上，光子一个模体积就是光子所占相空间大小，它实质上是一个三度空间上的测不准关系式：

$$\Delta x\Delta p_x\Delta y\Delta p_y\Delta z\Delta p_z\geqslant\hbar^3 \tag{1}$$

设 z 为光束传输的方向，$\Delta z\Delta p_z\geqslant\hbar$，并令 $\Delta x\Delta y=\Delta S$ 为模的横截面，又因为 $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}$，故 $\Delta p_x\Delta p_y=\hbar^2\Delta k_x\Delta k_y=\hbar^2k^2\Delta\theta_x\Delta\theta_y$，显然 $\Delta\theta_x\Delta\theta_y$ 与模在横向散开的立体角 $\Delta\Omega$ 成正比的，若忽略常数比例因子，则(1)式便可写成：

$$\Delta S\Delta\Omega\geqslant\lambda^2 \tag{2}$$

王之江于1963年从可区分的最少光子状态的讨论[2]，首先导得了这一关系式。(2)式通常用来研究光学系统中光阑的衍射方向性，同时也用来讨论激光模的传输方向性[3]。正如上述，这个式子与测不准关系是完全一致的。然而应用这一式子来研究非 TEM_{00} 模的高阶模传输方向性产生了很多困难。实际上当高阶模与 TEM_{00} 模在模的断面 ΔS 一致时，光束离光轴发散角要比(2)式描述的 $\Delta\Omega$ 大得多。研究清楚这一原因，并导得更为一般的关系式诚然是十分必要的。

收稿日期：1981年10月27日。

众所周知 Heisenberg 的测不准关系只是在最小波包情况下研究的,如果令 $\alpha=x-\bar{x}$ 为微观粒子的位置误差, $\beta=p-\bar{p}$ 为动量误差,当取波包形式是:

$$\psi(x)=[2\pi(\Delta x)^2]^{-1/4}\exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{4\Delta x^2}+\frac{i\bar{p}x}{\hbar}\right] \tag{3}$$

则便能由

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\alpha^2\psi dx\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\beta^2\psi dx \tag{4}$$

导出测不准关系式来:

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2\geqslant\frac{1}{4}\hbar^2$$

或

$$\Delta x\Delta p\geqslant\frac{1}{2}\hbar \tag{5}$$

事实上由于取了(3)式的关系,同时假定了 $\alpha\psi=\gamma\beta\psi$, 其中 γ 为一常系数,于是在计算(4)式过程中可使一函数因子

$$\int\psi^*(\alpha\beta+\beta\alpha)\psi dx=0$$

而消失,从而获得最小测不准的数量。不难设想,如果波包不是(3)式的高斯分布形式,最小测不准值显然亦随之而异。

激光最低阶模的光子分布也是高斯型的,因此(2)式适用于这情况是不言而谕的。激光的临界振荡是单个光子无损耗地在谐振腔内自由振荡。在激光发明的初期已把激光振荡看作是微观系统线性谐振子的振荡运动[4]。实际上,稳定球面腔的模式分布与微观系统线性谐振子波函数分布是相同的,都是用厄米特多项式来描述。量子力学中描述谐振子微观运动的测不准关系,除了最低阶模可用 $\Delta x\Delta p\geqslant\frac{1}{2}\hbar$ 描述外,高阶模是完全不适用的。若用 n 阶谐振子波函数 $u_n(x)$ 代入(4)式可以求出测不准关系为[5]:

$$\Delta x\Delta p\geqslant\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar \tag{6}$$

显然这是描述谐振子运动最为一般的测不准关系,当 $n=0$ 为最低阶模,于是就过渡到(5)式。可见模的阶数越高,最小不可测定值也随之增高。对于激光模式相空间的测不准关系也应该用(6)式取代,按(2)式同样的推理过程,代替(2)式的关系应为

$$\Delta S\Delta\Omega\geqslant\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\lambda^2 \tag{7}$$

对于最低阶模 $n=0$, 除了常数因子 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 外便导到(2)式,(7)式表明高阶模的角发散度是与模的阶数成抛物线关系增大。这一关系式与实际按高阶横模分布计算得到的方向性 $\Delta\Omega$ 是一致的[6]。文献[6]指出了 $n\leqslant4$ 时 $\Delta\Omega$ 是与 n^2 成正比的,但当 $n>4$ 以上的横模,由于更多能量集中于中轴附近,抛弃了外部更大区域的能量弥散分布才导致稍大的差别,而量子力学测不准关系是考虑到整个光子到达区域的统计平均结果,是更为一般的关系式。

(7)式表明压抑高阶模使能量更集中于最低阶模,在传输上将更有利,光束亮度亦会大为提高。(7)式也表明了最低阶模的不确定性与光场量子化零点能 $\frac{1}{2}\hbar\omega$ 存在分不开的,这一影响在高阶模中变得很小了。

参 考 文 献

[1] 1981年9月5日至12日在安徽太平县召开,由中国光学学会及中国科技大学联合主办。

[2] 王之江;《物理学报》, 1963, **19**, 320.

[3] 激光物理学编写组;"激光物理学",上海人民出版社, 1975, p. 48.

[4] H. Kogelnik, W. W. Rigrod; *Proc. of IRE*, 1960, **50**, No. 2, 220.

[5] L. I. Schiff; Quantum Mechanics 3rd edition 1968, 73, McGraw-hill Book company, New York.

[6] 固体激光导论编写组;"固体激光导论",上海人民出版社, 1975, 446.