激光腔内的相干光净损耗功率和输出频宽

严祖祺

（上海科技大学物理系）

提要：本文针对激光腔内光强和粒子数分布的横向不均匀情况，讨论了腔内相干光净损耗功率 P_N 和贮能 U 的计算问题。并得到了输出频宽的修正公式。

Net power loss of coherent light in laser cavity and the linewidth of laser

Yan Zuqi

(Department of Physics, Shanghai University of Science and Technology)

Abstract: Some problems about the calculation of the storage energy U and P_N, the net power loss of coherent light in the cavity are discussed in accordance with such lasers in which the distribution of light intensity and population are transversely nonuniform, and the revised formula of linewidth has been obtained.

Maitland 在《激光物理》一书中已证明，激光器的输出频宽 $\Delta\nu$ 可由下式来定：

$$\Delta\nu = P_N/2\pi U \tag{1}$$

因此计算激光腔的相干光净损耗功率 P_N 和贮能 U 是计算激光器输出频宽的关键。

考虑到实际激光腔内光强和激光物质的粒子数分布是不均匀的，光强在激光腔横截面上分布的不均匀性更为明显。据此本文针对腔内光强和粒子数横向分布不均匀情况，来讨论相干光净损耗功率 P_N 和输出频宽 $\Delta\nu$ 的计算问题。至于纵向分布不均匀性问题，讨论方法在物理思想上跟横向不均匀性问题基本一致，只是数学计算稍为复杂，因此在本文中不准备讨论了。

首先计算腔内的贮能 U。若设腔长为 L；横截面为 S；输出腔镜的透射率为 α；腔内的光能密度为 $\rho(r,\theta)$（图1）。那么腔中的贮能 U 是

$$U = L\int_S \rho(r,\theta)dS \tag{2}$$

另一方面，若设激光腔正常工作时的输出功率为 P_0，考虑到腔镜的透射率为 α，于是通过腔内任一横截面 S 的总功率是

$$P = \int_S \frac{c}{n}\rho(r,\theta)dS = P_0/\alpha \tag{3}$$

式中 $\frac{c}{n}$ 是光在腔内介质中的传播速度，n 是介质折射率。在通常情况下腔内各处介质的

收稿日期：1981年8月19日。

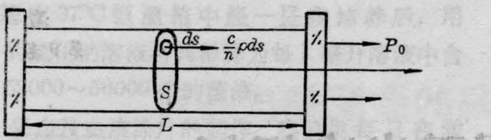

图 1

折射率可近似看作常数，于是得到

$$U=P_0Ln/\alpha c \tag{4}$$

这就是光腔贮能 U 和激光腔输出功率 P_0 之间的关系。

相干光净损耗功率 P_N 是激光腔因透射输出引起的损耗功率和腔内因受激发射得到的增益功率之差。考虑到物质原子的自发发射和受激发射这两种发光机构，并利用腔的稳定工作条件，Maitland 已证明

$$P_N=P_i^{(2)} \tag{5}$$

式中 $P_i^{(2)}$ 是激光物质因自发发射向腔体提供的某量子态的非相干光功率，我们将直接按照 Einstein 量子辐射理论来计算 $P_i^{(2)}$。就单模激光腔来说，腔内的光属于同一量子态，$P_i^{(2)}$ 可理解为腔内激光物质向该量子态提供的自发发射的功率。

由量子辐射理论知道，腔内所有处于激发态 m 的原子，自发发射频率在 $\nu\rightarrow\nu+d\nu$ 范围的光的总功率是

$$P^{(2)}=h\nu A_{mn}F(\nu,\nu_0)\cdot d\nu\, L\int_S N_m(r,\theta)dS \tag{6}$$

式中 A_{mn} 是原子从激发态 m 到基态 n 的自发跃迁几率；$F(\nu,\nu_0)$ 是相应的原子光谱加宽的归一化响应函数；$N_m(r,\theta)$ 是在激发态 m 的原子数密度。为简单起见，已假设原子是二能级系统。

由统计物理学知道，谐振腔内频率在 $\nu\rightarrow\nu+d\nu$ 范围的光还可能有 $LS\frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu$ 种不同的量子态。所以腔内激光物质自发发射到某一量子态的非相干光功率是

$$P_i^{(2)}=P^{(2)}/SL\frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu=\frac{hc^3A_{mn}F(\nu,\nu_0)}{8\pi\nu S}\int_S N_m(r,\theta)dS \tag{7}$$

式中的 A_{mn}、$F(\nu,\nu_0)$ 等不易直接测量，$P_i^{(2)}$ 的值估算不方便。进一步利用腔的稳定工作条件和光的放大、损耗规律，可以把 $P_N=P_i^{(2)}$ 表达成容易测量的物理量的函数。

若设 $\frac{dI_i(r,\theta)}{dt}$ 表示腔内因光放大作用引起的光强增加率，$\frac{dI_T(r,\theta)}{dt}$ 表示腔内因单纯由透射损耗引起的光强衰减率。那么腔的稳定工作条件是

$$\frac{dI_i(r,\theta)}{dt}=\frac{dI_T(r,\theta)}{dt} \tag{8}$$

由光放大理论知道

$$\frac{dI_i(r,\theta)}{dt}=h\nu F(\nu,\nu_0)B_{mn}\cdot\left(N_m-\frac{B_{nm}}{B_{mn}}N_n\right)I(r,\theta) \tag{9}$$

注意到 Einstein 发射、吸收系数之间的关系，可得

$$\frac{dI_i(r,\theta)}{dt}=\frac{c^3}{8\pi\nu^2}A_{mn}F(\nu,\nu_0)\cdot\left(N_m-\frac{g_m}{g_n}N_n\right)I(r,\theta) \tag{10}$$

单纯由透射损耗引起的光强衰减率可这样来计算，如图 2 所示，若设腔内某处通过面元 dS 的光强是 $I(r,\theta)$，则腔中的贮能 U 和 $I(r,\theta)$ 有如下关系

$$U=L\int_S\rho(r,\theta)dS=\frac{Ln}{c}\int_S I(r,\theta)dS \tag{11}$$

在 $t\rightarrow t+dt$ 时间内，经腔镜透射出去的能量是

$$dU=dt\int_S I_0(r,\theta)dS=\alpha dt\int_S I(r,\theta)dS \tag{12}$$

如果不考虑光的放大因素，那在 $t+dt$ 时刻

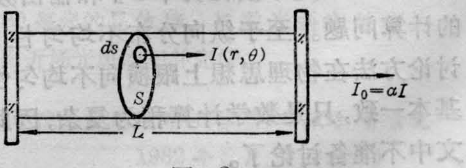

图 2

腔的贮能是

$$U^{*}=U-dU=U-\alpha dt\int_{S}I(r,\ \theta)dS$$

注意到贮能和光强的关系式(11)，可知 $t+dt$ 时刻腔内的光强 $I^{*}(r,\ \theta)$ 满足下式

$$\frac{nL}{c}\int_{S}I^{*}(r,\ \theta)dS=U^{*}$$

$$=U-\alpha dt\int_{S}I(r,\ \theta)dS \quad (13)$$

由定义 $\frac{dI_T}{dt}=(I-I^{*})/dt$，可以算得

$$\int_{S}\frac{dI_T}{dt}dS$$

$$=\left[\int_{S}I(r,\ \theta)dS-\int_{S}I^{*}(r,\ \theta)dS\right]\Big/dt$$

$$=\frac{c\alpha}{nL}\int_{S}I(r,\ \theta)dS \quad (14)$$

由(8)、(10)、(14)可求出

$$A_{mn}F(\nu,\ \nu_0)=\frac{8\pi\nu^2\alpha}{c^2nL}\frac{\int_{S}I(r,\ \theta)dS}{\int_{S}\left(N_m-\frac{g_m}{g_n}N_n\right)I(r,\ \theta)dS} \quad (15)$$

再由(7)和(5)可得相干光净损耗功率

$$P_N=\frac{\alpha ch\nu}{SLn}\frac{\int_{S}I(r,\ \theta)dS\int_{S}N_m(r,\ \theta)dS}{\int_{S}\left(N_m-\frac{g_m}{g_n}N_n\right)I(r,\ \theta)dS} \quad (16)$$

将(16)、(4)代入(1)可得激光腔的输出频宽公式

$$\Delta\nu=\frac{\alpha^2c^2h\nu}{2\pi P_0L^2n^2S}\times\frac{\int_{S}I(r,\theta)dS\int_{S}N_m(r,\ \theta)dS}{\int_{S}\left(N_m(r,\ \theta)-\frac{g_m}{g_n}N_n(r,\ \theta)\right)I(r,\ \theta)dS} \quad (17)$$

严格来说，激光腔输出频宽 $\Delta\nu$ 和腔内光强、粒子数分布有关。如果粒子数的空间分布是均匀的话，那么(17)式可简化为

$$\Delta\nu=\frac{\alpha^2c^2h\nu}{2\pi P_0L^2n^2}\left[1-\frac{g_mN_n}{g_nN_m}\right]^{-1} \quad (18)$$

若粒子数反转阈值很大时，(18)式可进一步简化为

$$\Delta\nu=\frac{\alpha^2c^2h\nu}{2\pi P_0L^2n^2} \quad (19)$$

(18)和(19)就是 Maitland 和 Townes 分别算得的频宽公式。由此可见，本文算得的频宽公式(17)是对常见的频宽公式的一种修正。在一定条件下(17)式可以简化为常见的频宽公式(18)和(19)。

由上面的计算还可看出，在粒子数分布均匀的前题下，光强的横向分布 $I(r,\ \theta)$ 并不影响腔的输出频宽。只有当粒子数分布不均匀时，光强分布对频宽 $\Delta\nu$ 的影响才显示出来。我们作过进一步的计算，发现若同时考虑光强分布的纵向和横向不均匀性的话，那么即使在粒子数分布均匀的前题下，光强 $I(r,\ \theta,\ z)$ 的具体形式也会对输出频宽 $\Delta\nu$ 产生相当的影响。

参 考 文 献

[1] 朱如曾等编译;《激光物理》,国防工业出版社,1974, p. 141, p. 27.

[2] 固体激光导论编写组;《固体激光导论》,上海人民出版社, 1975, p. 93.

[3] 周世勋; 《量子力学》, 上海科技出版社, 1962, p, 235.

[4] 王竹溪;《统计物理学导论》,高等教育出版社,1957, p. 256.

[5] A. L. Schawlow, C. H. Townes; *Phys. Rev.*, 1958, **112**, 1940.