

高阶横模光束的发散角

张培林

(清华大学)

提要: 本文对高阶横模光束发散角进行了讨论, 并提出发散角的一种新的定义方法。

Divergence of higher-order laser beams

Zhang Peilin

(Qinghua University)

Abstract: In this paper, divergence of higher-order laser beams is discussed and a new definition of divergence is suggested.

光束尺寸和发散角是描写激光光束的重要参量, 对于基横模 TEM_{00} 这些量已有较多报导, 例如 [1, 2]。但对高阶横模, 由于是多个光斑组成的花样, 存在着一些模糊之处。如对任意阶 TEM_{mn} 模的光束发散角如何定义较好? 发散角的概念是否仅限于远场才能使用? 光束面积和立体发散角的乘积关系式 $4S\Delta\Omega \sim \lambda^2$ 对高阶横模是否和基横模同样成立等等。这类问题, 不仅从理论上值得探讨, 而且对激光光束参数测量、高阶横模的研究和某些激光应用, 也有一定实际意义。本文对光束尺寸和发散角提出一种新的定义方法, 意义明确, 可适用于任意阶横模。按此定义, 近场也可引入发散角概念, 原有的定义相当于本法在远场情况的特例。

一、光束尺寸(均方根值)

对直角坐标系 TEM_{mn} 模激光光场可用下式表示 [2]:

$$\begin{aligned} \dot{u}(x, y, z) e^{-i(kz+\varphi)} \\ = N_m N_n \frac{w(0)}{w} H_m\left(\sqrt{2} \frac{x}{w}\right) \\ \times H_n\left(\sqrt{2} \frac{y}{w}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2} - i \frac{k}{2R}(x^2+y^2)} \\ \times e^{-i(kz+\varphi)} \end{aligned} \quad (1)$$

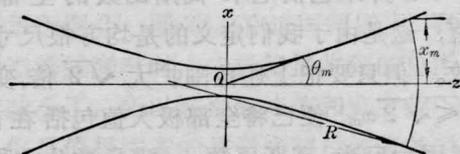
式中 $\dot{u}(x, y, z)$ 为光场复振幅; $k = 2\pi/\lambda$; $w(0) = \sqrt{\lambda b/2\pi}$, b 为等效共焦腔长;

$$w = w(0) \left[1 + \left(\frac{2z}{kw(0)^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \quad (2)$$

R 为 z 处的波面曲率半径,

$$R = z \left[1 + \left(\frac{kw(0)^2}{2z} \right)^2 \right]; \quad (3)$$

为了书写简单, 令



收稿日期: 1981年10月16日。

$$\psi_m(x) = N_m \sqrt{\frac{w(0)}{w}} H_m\left(\sqrt{2} \frac{x}{w}\right) e^{-\frac{x^2}{w^2}} \quad (4)$$

ψ_m 是厄米-高斯函数^[3]; N_m 是归一化常数, 使

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^2 dx = 1.$$

易证

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} i^* x i dx dy = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} i^* x^2 i dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m x^2 \psi_m dx \end{aligned} \quad (6)$$

我们取(6)式的平方根为 x 方向 m 阶模光束尺寸(均方根值) x_m , 计算得到

$$x_m = \sqrt{\bar{x}^2} = \sqrt{2m+1} \frac{w}{2} \quad (7)$$

当 $m=0$,

$$x_0 = \frac{w}{2} \quad (8)$$

可见 m 阶模光束尺寸 x_m 比 0 阶模 x_0 大 $\sqrt{2m+1}$ 倍。由(2)式, 光束尺寸随 z 增大而增大。

完全类似地可定义 y 方向 n 阶模光束尺寸

$$\bar{y}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} i^* y^2 i dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n y^2 \psi_n dy \quad (9)$$

$$y_n = \sqrt{\bar{y}^2} = \sqrt{2n+1} \frac{w}{2} \quad (10)$$

$$y_0 = \frac{w}{2} \quad (11)$$

一般说来 m, n 不相同, TEM_{mn} 模光束截面近似为矩形。但对 TEM₀₀ 模, 光束截面为圆形。

需要指出的是(7)式定义的光束范围 $|x| \leq x_m$ 并未包括厄米-高斯函数的全部极大值, 这是由于我们定义的是均方根尺寸的缘故。但只要把上述范围扩大 $\sqrt{2}$ 倍, 变为 $|x| \leq \sqrt{2} x_m$, 便已将全部极大值包括在内。这是因为厄米-高斯函数 ψ_m 满足微分方程^[3]

$$\frac{d^2 \psi_m}{dx^2} + \frac{2}{w^2} \left(2m+1 - \frac{2x^2}{w^2} \right) \psi_m = 0 \quad (12)$$

当 $x = \pm \sqrt{2} x_m$ 时, $\frac{d^2 \psi_m}{dx^2} = 0$, 即为 ψ_m 最外侧的拐点。而在两个最外侧拐点之间必定包括全部极大值在内。

二、光束发散角(均方根值)

为了引出高阶横模光束发散角的定义, 先对 $\dot{u}(x, y, z)$ 进行二维傅里叶变换:

$$\begin{aligned} \dot{u}(x, y, z) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} F(k\alpha, k\beta) \\ &\quad \times e^{-ik(\alpha x + \beta y)} d(k\alpha) d(k\beta) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} F(k\alpha, k\beta) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(x, y, z) \\ &\quad \times e^{ik(\alpha x + \beta y)} dx dy \end{aligned} \quad (14)$$

易证

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} F^*(k\alpha, k\beta) F(k\alpha, k\beta) \\ \times d(k\alpha) d(k\beta) = 1 \end{aligned} \quad (15)$$

(13)式的物理意义就是把 $\dot{u}(x, y, z)$ 分解为沿不同方向(方向余弦为 $\alpha, \beta, \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}$) 传播的平面波^[4], 由此可引入方向余弦 α, β 的平方平均值:

$$\begin{aligned} \overline{(k\alpha)^2} &= \iint_{-\infty}^{\infty} F^*(k\alpha, k\beta) (k\alpha)^2 \\ &\quad \times F(k\alpha, k\beta) d(k\alpha) d(k\beta) \end{aligned} \quad (16)$$

由于 $\dot{u}(x, y, z)$ 对 x, y 可以分离变量,

$$F(k\alpha, k\beta) = G_m(k\alpha) G_n(k\beta) \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} G_m(k\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m \\ &\quad \times e^{-i \frac{kx^2}{2\sigma}} e^{ik\alpha x} dx \end{aligned} \quad (18)$$

是归一化的。由此得出

$$\begin{aligned} \overline{(k\alpha)^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} G_m^*(k\alpha) (k\alpha)^2 G_m(k\alpha) d(k\alpha) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m e^{i \frac{kx^2}{2\sigma}} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \\ &\quad \times (\psi_m e^{-i \frac{kx^2}{2\sigma}}) dx \end{aligned} \quad (19)$$

传播方向对 x 轴的余弦就是 x 方向发散角的

正弦, 故可将 x 方向光束发散角(均方根值)定义为

$$\alpha_m = \sin \theta_m = \sqrt{\alpha^2} \quad (20)$$

由(19)式

$$k^2 \alpha_m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi_m dx + \frac{k^2}{R^2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m x^2 \psi_m dx \quad (21)$$

于是

$$\alpha_m = \sqrt{(\alpha'_m)^2 + \frac{x_m^2}{R^2}} \quad (22)$$

其中

$$k^2 (\alpha'_m)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi_m dx$$

由(12)式 $= (2m+1) \frac{1}{w^2}$ (23)

故

$$x_m k \alpha'_m = (2m+1) \frac{1}{2} \quad (24)$$

这符合一般的测不准关系式: 物理量长度与其傅里叶变换谱宽度的乘积 $\geq \frac{1}{2}$ ^[6]。当 $m=0$ 时,

$$x_0 k \alpha'_0 = \frac{1}{2} \quad (25)$$

测不准关系等号成立。

将(7)、(23)及(2)、(3)诸式代入(22), 得出

$$\alpha_m = \sin \theta_m = \sqrt{2m+1} \frac{1}{kw(0)} \quad (26)$$

这样定义出来的光束发散角和已有的报导^[6]

$$\theta_m = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{m \text{ 阶光束尺寸}}{z} \quad (27)$$

不同, 后者只对远场($z \rightarrow \infty$)才成立。而(26)式的定义无此限制, 对任意 z 值都是成立的; 它的物理意义为: 对于给定的 z 值, 在 z 平面上复光场分布可分解为角谱是 $F(k\alpha, k\beta)$ 的平面波的迭加; 这些平面波对 x, y 轴的方向余弦 α, β 以角谱强度为权重的均方根值, 就是光束在 x, y 方向的发散角。按(22)式, α_m 由两部分构成, 当 $z \rightarrow \infty$, 由(23)知 $\alpha'_m \approx 0$, $\alpha_m \approx \frac{x_m}{R} \approx \sqrt{2m+1} \frac{1}{kw(0)}$, 即只有第二项在起作用。

而此项的物理意义, 由图看出就是 $(x_m, 0, z)$ 点的光束波面法线与 z 轴的夹角。由于 $z \rightarrow \infty$ 时, $R \approx z$, 此时 α_m 和(27)式相同。所以本定义对远场情况和[6]的定义是一致的(除了本文使用的是均方根值以外)。

对于已有报导未曾考虑的近场情况, 下面以光腰处为例子以说明: $z=0, w=w(0), R \rightarrow \infty$, 据(22)式, $\alpha_m = \alpha'_m$, 即只有第一项存在。 α'_m 的物理意义仍可按上段叙述理解, 只是由于波面是平面, $u(x, y, z)$ 的复数部分不再存在而成为光场振幅。所以 α'_m 就是方向余弦 α 以光场振幅的傅里叶变换角谱强度为权重的均方根值, 它只与光场振幅及其偏导数有关, 与光场的波面(位相)无关。对于光轴上其他任意位置, 第一项和第二项都不能忽略, 光束发散角实际上是由 z 平面上光场振幅分布引起的 α'_m 和 $(x_m, 0, z)$ 处的波面法线与 z 轴夹角得出的 x_m/R 共同决定。

类似地可定义 y 方向光束发散角(均方根值), 其值为:

$$\beta_n = \sin \theta_n = \sqrt{2n+1} \frac{1}{kw(0)} \quad (28)$$

相应于(24)式有

$$y_n k \beta'_n = (2n+1) \frac{1}{2} \quad (29)$$

最后, 讨论一下光束面积和立体发散角之乘积, 对光腰处 $\Delta S_{mn} = [2x_m 2y_n]_{z=0}, \Delta \Omega_{mn} = 2\theta_m 2\theta_n$, (θ_m, θ_n 很小), 则

$$\Delta S_{mn} \Delta \Omega_{mn} = (2m+1)(2n+1) \frac{\lambda^2}{\pi^2} \quad (30)$$

相应的基模情况 $m=n=0$,

$$\Delta S_{00} \Delta \Omega_{00} = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \quad (31)$$

可见 mn 阶横模的 $\Delta S \Delta \Omega$ 与基横模不同, 为基横模的 $(2m+1)(2n+1)$ 倍。如果考虑到基横模光束截面是圆形, 光束面积 $\Delta S = \pi(\sqrt{2}x_0)^2, \Delta \Omega = \pi(\sqrt{2}\theta_0)^2$, 基横模的

$$\Delta S \Delta \Omega = \frac{\lambda^2}{4} \quad (32)$$

(32)式与(31)式差一系数 $\pi^2/4$, 但这不影响

(下转第 464 页)

	[111]Nd:YAG ^[1]	[010]Nd:YAP ^[2]
热透镜焦距		$f_{x_1=0}(x_1) = \frac{1}{\left\{ \frac{\eta P_{in}}{2\pi r_0^2 K_{33}} \left[\frac{\partial n_1}{\partial T} + \frac{n_1^3}{2} \left[P_{11} \left(\frac{AM-RN}{AD-RS} + \alpha_1 \right) + P_{12} \alpha_2 + P_{13} \left(\frac{DN-SM}{AD-RS} + \alpha_3 \right) \right] \right\]} + \frac{n_1^3 LC_1}{AD-RS} (AP_{11} - SP_{13}) \right.}$ $f_{x_3=0}(x_3) = \frac{1}{\left\{ \frac{\eta P_{in}}{2\pi r_0^2 K_{11}} \left[\frac{\partial n_3}{\partial T} + \frac{n_3^3}{2} \left[P_{31} \left(\frac{AM-RN}{AD-RS} + \alpha_1 \right) + P_{32} \alpha_2 + P_{33} \left(\frac{DN-SM}{AD-RS} + \alpha_3 \right) \right] \right\]} + \frac{n_3^3 LC_2}{AD-RS} (DP_{33} - RP_{31}) \right.}$ $f_{x_1=0}(x_3) = \frac{1}{\left\{ \frac{\eta P_{in}}{2\pi r_0^2 K_{33}} \left[\frac{\partial n_3}{\partial T} + \frac{n_3^3}{2} \left[P_{31} \left(\frac{AM-RN}{AD-RS} + \alpha_1 \right) + P_{32} \alpha_2 + P_{33} \left(\frac{DN-SM}{AD-RS} + \alpha_3 \right) \right] \right\]} + \frac{n_3^3 LC_1}{AD-RS} (AP_{31} - SP_{33}) \right.}$

参 考 文 献

- [1] J. D. Foster *et al.*; *J. Appl. Phys.*, 1970, **41**, No. 9, 3656. W. Koechner *et al.*; *IEEE J. Quant.*

- Electr.*, 1970, **QE-6**, No. 9, 557.
 [2] 沈鸿元,《物理学报》, 1981, **30**, No. 8, 1085.
 [3] M. A. Karr; *Appl. Opt.*, 1971, **10**, No. 4, 893.
 [4] S. E. Miller; *Bell System Tech. Journal*, 1965, **44**, 2017.

(上接第 468 页)

光谱匹配和具有高的泵浦效率, 需要很好地控制灯的功率使用范围。在我们采用的钾、铷、汞填充量下, 钾汞灯约是 220~320 瓦; 对于钾铷灯使用功率要求小于 250 瓦。腔内运用功率还要更低些。因此, 我们研制的碱金属蒸气灯是低功率下运用的有效泵浦源。

参 考 文 献

- [1] 王焕灯等;《激光》, 1980, **7**, No. 1, 52.
 [2] 范品忠等;《光源与照明》, 1979, No. 1, 30.
 [3] W. T. Bayha *et al.*; *IEEE Transactions on Electron Devices*, 1970, **ED-17**, No. 8, 612.

(上接第 477 页)

高阶横模的 $\Delta S_{mn} \Delta \Omega_{mn}$ 随 $(2m+1)(2n+1)$ 线性增加的实质。

参 考 文 献

- [1] H. Kogelnik, T. Li; *Proc. IEEE*, 1966, **54**, 1312.
 [2] A. Maitland, M. H. Dunn; *Laser Physics*, North-Holland, Amsterdam 1969, p140, 156.

- [3] Jahnke-Emde-Lösch; *Tables of Higher Functions*, McGraw-Hill, New York, 1960, p101~104.
 [4] J. W. 顾德门著;《傅里叶光学导论》, 中译本, 科学出版社出版, 1976, p54~56.
 [5] R. N. Bracewell; *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw-Hill, New York, 1978, p160.
 [6] W. Kleen, R. Müller; *Laser*, Springer-Verlag, Berlin 1969, p60~63.