激活气体中 Huygens 原理的表达式

吴　中　祥

（中国科学院力学所）

提要：直接由 Maxwell 方程组导出了在可变复介电常数的激活气体中电场强度的波动方程，并以 1% 的精度得到它的解的表达式，可作为计算气体激光器光腔中场强分布的基础。

Expression of Huygens' principle for active gases

Wu Zhongxiang

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: The wave equation of electric field intensity in the active gas with variable complex dielectric constants has been directly deduced from the set of Maxwell equations. The expression of its solution has been obtained with an accuracy of 1%. It may be used as the basis for calculating the field distributions in gas laser cavities.

一、引　言

严格地从 Maxwell 方程组出发，考虑到电、磁矢量分别平行与垂直于电磁波的偏振方向，且均与电磁波传播方向垂直的特性，对于各向同性介质，略去磁导率与1的差别，就可以将电、磁矢量方程简化为电场强度 E 的数量方程。再设 E 的解是可以将时间与空间变量分离，并且随时间的变化是谐和的，就可以得到电场强度随空间变化的因子 $E_0(\boldsymbol{r})$ 所遵从的普适方程：

$$\nabla^2 E_0(\boldsymbol{r})+\varepsilon K^2 E_0(\boldsymbol{r})+\nabla E_0(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial r}\ln\varepsilon + E_0(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2}{\partial r^2}\ln\varepsilon=0, \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为空间坐标矢量；ε 为介电常数；K 为真空中波数；∇ 为 Laplace 算符。

对于均匀介质，ε 是常量，(1) 进一步简化为：

$$\nabla^2 E_0(\boldsymbol{r})+\varepsilon K^2 E_0(\boldsymbol{r})=0, \quad (2)$$

特别是，当介质是真空（$\varepsilon=1$），容易由(2)求得 Fresnel-Kirchhoff 衍射方程：

$$V^f(p)=-\frac{ik}{4\pi}\int_A \frac{V_{p_0}e^{ik(r+r')}}{rr'} \cdot(\cos\theta-\cos\theta')ds_A, \quad (3)$$

其中 $V^f(p)$ 为真空中 A 面上的场传至 P 点处的场强；V_{p_0} 为 A 面外足够远的一点（均匀球面波源）P_0 处的场强；$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{r}'$ 为由 P、P_0 到面

收稿日期：1981年2月20日。

元 ds_A 的径矢；θ、θ' 为 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{r}'$ 与 ds_A 外法线 $\boldsymbol{n}$ 间的夹角。(3)与按 Huygens 原理得到的结果完全一致[2]。但是，对于非均匀介质，由于 ε 不是常量，一般地是不能将(1)简化为(2)，而且也不能得到类似于(3)的表达式。然而，计算激光器中场强分布的现有方法却都在非均匀的激活气体介质中，未经证明地直接引用了类似(2)、(3)的方程[3]。

本文将根据气动激光器光腔的实际工作条件，具体地分析这类激活气体介质的不均匀性的特点，从而能够：

① 证明在这种激活气体介质中，电场强度所遵从的方程也能简化为形如(2)的波动方程，但其中 ε 应换为复量 $\hat{\varepsilon}$，且 $\hat{\varepsilon}$ 不是常量。

② 以 1% 量级的精度，近似地求得复介电常数 $\hat{\varepsilon}$ 不是常量的激活气体介质中，电场强度波动方程的解：

$$V(p) = -\frac{ikn}{4\pi}\int_A \frac{V(A)}{r} \cdot e^{iknr+\frac{1}{2}\int_0^r g dr} \cos\theta_A \, ds_A \qquad (4)$$

其中 n 为介质的折射率；$V(p)$、$V(A)$ 分别表示在 P 点处的场和在 A 面上的场分布。

③ 分析表明：(4)相当于激活气体介质中 Huygens 原理的表达式，由它能把 Huygens 原理扩展应用于激活气体介质的具体计算中。

二、激活气体中电场强度的波动方程

对于激活的介质，由于必须计及介质的增益，介电常数 ε 应是复数 $\hat{\varepsilon}$，通常用复折射率 $\hat{n}$ 表达：

$$\hat{n}(\boldsymbol{r}) = n(\boldsymbol{r}) - \frac{i}{2k} g(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\hat{\varepsilon}(\boldsymbol{r})} \qquad (5)$$

其中实部 $n(\boldsymbol{r})$ 是通常的绝对折射率；虚部是与介质的饱和增益系数 $g(\boldsymbol{r})$ 成正比的。因而，激活介质中电场强度的方程应是将(1)中的 ε 换为复量 $\hat{\varepsilon}$。

对于气体介质，n 仍是常量且 $\simeq 1$（通常将光腔中密度视作常量，而气动激光器中激波等密度不均匀效应所引起的折射率改变，是仅作为相应的附加光程差来粗略地处理的），但是 $g(\boldsymbol{r})$ 却是随着所在位置场强的不同，以及气动激光器中沿流动方向位置的不同而相对地显著变化。可见，激活气体介质的复折射率 $\hat{n}(\boldsymbol{r})$ 是不均匀的，因此一般地(1)仍不能简化为通常波动方程的形式。但是这种不均匀性又仅仅表现在 $\hat{n}(\boldsymbol{r})$ 的虚部，仅仅是由于 $g(\boldsymbol{r})$ 的不均匀性引起的。

由目前国内、外已报导的气体(气动)激光器件的实际工作条件：

$$\left.\begin{array}{l}
1/k \sim 10^{-4} \text{ 厘米量级（例如 } \lambda = 10.6 \text{ 微米）} \\
g \sim 10^{-3} \text{ 厘米}^{-1} \text{ 量级} \\
\dfrac{\Delta g}{\Delta r} \sim 10^{-4} \text{ 厘米}^{-2} \text{ 量级（在场强变化较大的区域} \sim 10^{-3} \text{ 厘米}^{-2} \text{ 量级）} \\
\text{因而，} \\
g/2k \sim 10^{-7} \text{ 量级} \\
\dfrac{1}{k}\dfrac{\Delta g}{\Delta r} \sim 10^{-8} \text{ 厘米}^{-1} \text{ 量级（在场强变化较大的区域} \sim 10^{-7} \text{ 厘米}^{-1} \text{ 量级）}
\end{array}\right\} \qquad (6)$$

可见，对于激光腔中的激活气体介质 $\hat{\varepsilon} \simeq 1$，而且只要 $\dfrac{\nabla E_0}{E_0} \gg 10^{-8}$ 量级（这个条件，显然对于一般情况都能满足）就有 $\dfrac{\partial}{\partial r}\ln\hat{\varepsilon} \ll \dfrac{\nabla E_0}{E_0}$ 及 $\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\ln\hat{\varepsilon} \ll \dfrac{\nabla^2 E_0}{E_0}$，这样，将 ε 换为 $\hat{\varepsilon}$ 后的(1)式就能够简化为将 ε 换为 $\hat{\varepsilon}$ 的(1)式。再以(5)代入，就得到：

$$\nabla^2 E_0(\boldsymbol{r}) + k^2 \hat{n}^2(\boldsymbol{r}) E_0(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad (7)$$

这就是非均匀的激活气体介质中电场强度所遵从的波动方程。在气体(气动)激光器件的实际工作条件下，它可以严格地由 Maxwell 方程组直接导出。

三、激活气体介质中电场强度方程的解

采用与通常类似的方法，令 $V(\boldsymbol{r})$ 满足(6)并设 $U(\boldsymbol{r})=\frac{1}{r}e^{iknr+\frac{1}{2}\int_0^r g(r)dr}$（注意：与通常的相比多出与 $g(\boldsymbol{r})$ 的积分有关的因子）代入 green 定律。考虑到其中 g、$\frac{\Delta g}{\Delta r}$ 等均为缓变函数，它们对 r 的积分可以近似地用积分区间的平均值来表达；至于 $V(\boldsymbol{r})$ 对于我们所考虑的光波，是以光频随 $\boldsymbol{r}$ 而激烈改变的，但仍可将 $V(\boldsymbol{r})$ 表示为：

$$V(\boldsymbol{r})=V_0(\boldsymbol{r})e^{iknr'} \tag{8}$$

其中 $e^{iknr'}$ 表示 $V(\boldsymbol{r})$ 中与频率有关的随 r' 快变的因子；而 $V_0(\boldsymbol{r})$ 就是仅与振幅及初始位相有关的因子，它也应是 $\boldsymbol{r}$ 的缓变函数（即将 $V(\boldsymbol{r})$ 视作经 $\boldsymbol{r}'$ 传来的 $V_0(\boldsymbol{r})$）；$\frac{\partial r'}{\partial r}$ 是 $\boldsymbol{r}'$ 与 $\boldsymbol{r}$ 间夹角的余弦，是绝对值小于1的缓变函数，而且由于 $k\sim10^4$ 厘米$^{-1}$ 量级，实际器件中，激活区 $(g\neq0)$ 的空间尺度都在 $r\sim10^2$ 厘米的量级之内，因而，只要 $\frac{\partial V_0}{\partial r}\Big/V_0\simeq 10^{-2}$ 厘米$^{-1}$ 的量级就可以认为：

$$\frac{\partial V_0}{\partial r}\ll knV_0\frac{\partial r'}{\partial r} \tag{9}$$

由(8)就有：

$$\frac{\partial V}{\partial r}\simeq ik\frac{\partial r'}{\partial r}V \tag{10}$$

因此，我们可以 1% 量级的精度表达 gneen 定律中的面积分：

$$I_s=ikn\int_s\left(1+\frac{\partial r'}{\partial r}\right)\frac{V_0}{r}\cdot e^{ikn(r+r')+\frac{1}{2}\int_0^r gdr}\cos\theta_s ds, \tag{11}$$

体积分：

$$I_v=ikn\int_v g\frac{V_0}{r}e^{ikn(r+r')+\frac{1}{2}\int_0^r gdr}dv \tag{12}$$

（通常仅考虑真空或非激活的介质，即 $g\equiv0$，所以 $I_v\equiv0$）

注意到 g、V_0、r' 都是 r 的缓变函数，运用分部积分并考虑到(6)、(10)，就可以与通常的方法一样，首先考虑一个以 P 点为中心，以远大于波长的 r 为半径的球形区域内的情况，与通常不同的是 $I_v\neq0$，但是可以证明 I_v 与 I_s 相比，完全可以在 1% 量级的精度内被忽略（因为(10)是仅以 1% 量级的精度成立）。而且由于我们仅考虑在距 P 点有限距离的光源，它们在极远处的影响已可衰减到 $rV\to0$，因而当 r 足够大时，面积分 I_s 也趋于消失。

进一步将实际器件中包围任一点 P 的封闭曲面 s 划分为如下三个部分，即：$\int_s=\int_A+\int_B+\int_C$，在面 A 上，给定 V_0 的分布，A 面是器件光腔的反射镜面，在 B 上，令 $V_0=0$，B 面是将 A 面的边缘外延至 r 足够大（使 $rV_0\to0$）的地方与面 C 联接（实际上由于绕射，在 A、B 面边接处附近 $V_0=0$ 的假设并不成立，但当 A 的尺度与波长相比很大时，除去在边接处波长尺度内的小区域外，$V_0=0$ 还是能近似成立的）。在面 C 上，与半径大到能使 I_s 趋于消失的球面 C' 处处密合；由于在激活区外 $g\equiv0$，使用这样的封闭曲面 s，就完全能够计算任何形状的实际器件的相应的积分。而且曲面 s 与球面 C' 内的体积分 I_v 是完全相同的（在 C' 球内，曲面 s 外的区域 $g\equiv0$ 对 I_v 无贡献）。在 B 面上，$I_s=0$（因为 $V_0=0$）；在 C 面上，$I_s\to0$（因为 r 足够大）；而面 A 上，I_s 大于球面 C' 上的相应部分；可见在曲面 s 包围的范围内，I_v/I_s 应比球面 C' 范围内的还小，因而在曲面 s 范围内 I_v/I_s 更是完全可以忽略的。

还与通常的方法一样，为了扣除在 $r=0$ 处 U 的奇异点，采取一个包围着 P 点的半径 $r=\varepsilon_0\to0$ 的无穷小球面 s'，使得在 s 与 s' 间的连通区域内完全可以运用 green 定律。由于 $\lim\limits_{r=\varepsilon_0\to0}e^{iknr+\frac{1}{2}\int_0^r gdr}=1$ 容易求得 s' 球上 $I_s\to$

$4\pi V(P)$, $I_v \to 0$, 这样由 green 定律, 有:

$$V(P)=-\frac{ikn}{4\pi}\int_A\left(1+\frac{\partial r'}{\partial r}\right)\frac{V(A)}{r}\cdot e^{iknr+\frac{1}{2}\int_0^r g dr}\cos\theta_A\, ds_A \qquad (13)$$

(13)仅含有在 A 面上的积分, 而 $V(A)$ 又是 A 面上任意给定的初始分布, 而且

$$\left(1+\frac{\partial r'}{\partial r}\right)\cos\theta_A=\left(1+\frac{\partial r'}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial n}$$

$$=\frac{\partial r}{\partial n}+\frac{\partial r'}{\partial n}=\cos\theta_A-\cos\theta'_A,$$

我们可以选定 θ'_A 为任意常数(例如: 取 $\cos'_A\simeq 0$), 并将 $V(A)$ 分布中的初始位相部分作相应的调整, 以表达 A 面上的初始波形, 就可以将(13)改写为(4)。这就是激活气体介质中电场强度的衍射方程。以上证明, 也可采用 δ 函数予以简化, 但上述证法, 有物理图象更为清晰、直观的优点。

在实际使用时, 可以一定步长沿光轴将光腔区域划分为若干彼此平行的小片, 在光腔一端的镜面上, 任意给定 $V(A)$ 的初始值, 并从此向腔体另一端逐片运用(4)求得相应的 $V(P)$ 值, 到达另一端后再逐片返回, 如此迭代至腔内各片都有稳定的场强值, 就得到整个光腔的场强。

四、激活气体介质中 Huygens 原理的表达式

分析(4)可见, A 面上的场分布传至 P 点的场强, 可看作 A 面上各微小面元是具有一定的初始振幅和初始位相的点源; 分别由它们的中心发出的球面波在激活气体介质中传播至 P 点, 它们的光程差发生了改变(在(4)中, 由 e^{iknr} 表达), 强度得到了增益(在(4)中, 球面波振幅的改变是由 $\frac{1}{r}e^{\frac{1}{2}\int_0^r g dr}$ 表达的), 而 P 点的场强值就是把各面元这样传至 P 点的场强全部叠加起来(在(4)中表现为对 A 面的积分)。

这实际上是在激活气体中具体表达了 Huygens 原理。它与通常 Huygens 原理表达式的差别在于此处考虑的是不均匀的激活介质; 因而, 从各面元发出的波到达 P 点后的场强值, 与通常真空中按 Huygens 原理计算的差别在于, 还必须计及在光束的行程中激活介质对它的增益, 由(4)可见它与通常真空中 Huygens 原理的表达式 Fresnel-Kirchhoff 衍射方程相比, 仅多出一个与各面元光束行程中的增益有关的因子 $e^{\frac{1}{2}\int_0^r g dr}$。

在真空中, 由于 $n\equiv 1$, $g\equiv 0$, (4) 简化为:

$$V^f(P)=-\frac{ik}{4\pi}\int_A\frac{V(A)}{r}\cdot e^{ikr}\cos\theta_A\, ds_A, \qquad (14)$$

通常对真空中 Fresnel-Kirchhoff 衍射方程的证明是[1,2]: 设 $V(A)$ 是由 A 面外足够远的一点 P_0(设面元离 P_0 为 r', $\frac{1}{r'}$ 与 k 相比很小, $\frac{\partial r'}{\partial n}=-\cos\theta'$, θ' 是 $\boldsymbol{r}'$ 与 A 的外法线 $\boldsymbol{n}$ 间夹角)发出的均匀球面波, 即: $V(A)=(V_{p_0}/r')e^{ikr'}$, 其中 V_{p_0} 为常量(显然它只是(8)的一个特例), 这样, 由(13)就可以得到由(3)表达的在真空中的 Fresnel-Kirchhoff 衍射方程。

然而, 这种由一点 P_0 发出的常量振幅的均匀球面波传到 A 面上的场强值, 在实际使用时, 却还是当作在 A 面上任意的初始振幅和位相分布, 并取 $\theta'\simeq\pi$ 来叠代求解的。在小 Fresnel 数的情况下(取 $\theta\simeq 0$), 则分别由(3)、(14)求得的 V 就仅有一个常数因子的差别, 对于计算场强分布的相对值, 这就完全一致了。然而, 若采用本文(8)来表达 $V(A)$ 证明真空条件下的 Fresnel-Kirchhoff 方程(如(14)), 就不会有如上的矛盾, 而显得更为自然、合理、普适。

由(4)还可直接导出现有的各种计算场分布的方法[3]。由于(4)是由基本的 Maxwell 方程组直接导出, 并相当于激活气体介质中的 Huygens 原理, 因而能使这类计算建立

在较为稳固的基本原理的基础之上；并可看出它们可能的计算精度和必须的近似条件。

参 考 文 献

[1] A. Mactland, M. H. Dunn; Laser Physic, North-Holland Publishing Campany Amsterdem-London, 1969, p.366～367.

[2] B. B. Baker, E. T. Capson; The Mathematical Theory of Huygens Principle, Oxford, 1950.

[3] Fox Li; *IEEE J. Quant. Electr.*, 1966, **QE-2**, No. 12, 774～783; D. B. Rensch; *Appl. Opt.*, 1974, **13**, No. 11, 2546～2561; A. E. Siegman *et al.*; *Appl. Opt.*, 1974, **13**, No. 12, 2775; A. E. Siegman *et al.*; *Appl. Opt.*, 1975, **14**, No. 8, 1874～1889; Clark *et al.*; *AIAA Paper*, 1972, No. 72～708; 吴中祥;《物理学报》, 1980, **29**, No. 3, 382; 394.

(上接第438页)

表 1

	本实验结果	文献值
^{6}Li $2^2P_{1/2}$ 和 $2^2P_{3/2}$ 能级分裂	9.7±0.4 千兆赫	10.053 千兆赫
^{7}Li $2^2P_{1/2}$ 和 $2^2P_{3/2}$ 能级分裂	10.5±0.5 千兆赫	10.053 千兆赫
$2^2P_{1/2}$ 能级同位素位移	10.7±0.6 千兆赫	10.532 千兆赫
^{6}Li $2^2P_{3/2}F=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \leftarrow 2^2S_{1/2}F=\frac{3}{2}$ 线与 ^{7}Li $2^2P_{1/2}F=1 \leftarrow 2^2S_{1/2}F=2$ 线的间距	223±22 兆赫	197 兆赫
^{7}Li $2^2P_{1/2}F=1 \leftarrow 2^2S_{1/2}F=2$ 线与 $2^2P_{1/2}F=2 \leftarrow 2^2S_{1/2}F=2$ 线的间距	88±11 兆赫	91.8 兆赫
^{7}Li $2^2P_{1/2}F=2 \leftarrow 2^2S_{1/2}F=2$ 线与 $2^2P_{1/2}F=1 \leftarrow 2^2S_{1/2}F=1$ 线的间距	730±73 兆赫	711.7 兆赫
^{7}Li $2^2P_{1/2}F=1 \leftarrow 2^2S_{1/2}F=1$ 线与 $2^2P_{1/2}F=2 \leftarrow 2^2S_{1/2}F=1$ 线的间距	92±7 兆赫	91.8 兆赫

参 考 文 献

[1] Herbert Walther *et al.*; "Laser Spectroscopy", Second International Conference, Megeve, June 1975, 23～27.

[2] R. Mariella, Jr., *Appl. Phys. Lett.*, 1979, **35**, No. 8, 580～582.

[3] 王荫德等;《真空科学与技术》, 1982, No2. 73～76.

[4] P. R. Hammond; *Opt. Commun.*, 1979, **29**, No. 2, 331.

[5] H. Orth *et al.*; *Z. Physik*, 1975, **A273**, 221.

[6] K. C. Brog *et al.*; *Phys. Rev.*, 1967, **153**, No. 1, 91.

[7] G. J.Ritter; *Can. J.Phys.*, 1965, **43**, 770.

[8] E. U. Condon, G. H. Shortley; "The Theory of Atomic Spectra", Cambridge, 1957.

[9] K. Shimoda; "High-Resolution Laser Spectroscopy", Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg New York 1976.