组合图形法在光学检验中的应用

李锡善 蒋安民 夏青生

(中国科学院上海光机所)

提要：本文报导了组合干涉图的产生、特性及在光学材料和光学元件检验中的应用。

Application of composite pattern method in optical testing

Li Xishan, Jiang Anmin, Xia Qingsheng

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: In this paper, the formation, properties and the application of composite interferograms in the testing of optical materials and optical elements are reported.

当我们使用台曼干涉仪(图1)或裴索干涉仪(图2)检验光学材料或光学元件时，在视场中可能看到几组不同的干涉条纹。下面以台曼干涉仪为例，来说明这些条纹的形成、性质和应用。从图1可以看出，若不考虑样品的二次反射，在视场中将会出现 O_0、O_0'、O_1、O_2 和 O_3 五束相干光束(确保光源的相干性)。它们分别表示：透过 M_3 被 M_1 反射并再次透过 M_3 的光(O_0)；被 M_3 的第一面和 M_2 反

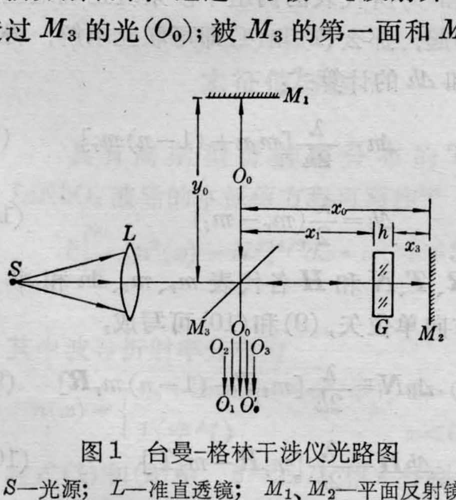


图1 台曼-格林干涉仪光路图

S—光源； L—准直透镜； M_1、M_2—平面反射镜；M_3—平面分光镜； G—样品

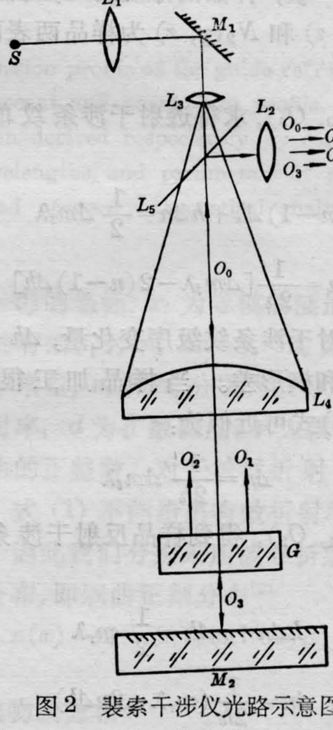


图2 裴索干涉仪光路示意图

S—光源； L_1、L_3、L_4—准直系统； L_2—观测系统；M_2—标准平面镜； G—样品； L_5—分光镜

收稿日期：1981年5月22日。

射并自准回来的光(O_0')；被样品第一面所反射的光(O_1)；被样品第二面反射的光(O_2)；透过样品，被 M_2 反射后，又透过样品被 M_3 所反射的光(O_3)。后三者是只考虑了最后被 M_3 的第一面所反射的光，如果考虑 M_3 第二面的反射，还应该加上三束与这三者相对应的光，共为八束相干光束。但在 M_3 的一个面镀有半反射层和 M_3 是比较理想的平板玻璃情况下或者是楔形板的情况下，后面的可以忽略，只有五束相干光。每两束光均可形成一组干涉条纹。由于光强的差别，几组条纹的对比度有些不同，可见度也不相同。由(O_0, O_0')形成无样品时的本底条纹，由(O_0, O_3)形成样品的透射干涉条纹，由(O_1, O_2)得到样品两表面的反射干涉条纹，(O_0, O_1)和(O_0, O_2)分别形成反映样品表面平整度的干涉条纹，(O_1, O_3)和(O_2, O_3)产生附加干涉条纹。

设 $x_0=y_0$，样品的厚度为 h，折射率为 n。$N_1(y, z)$ 和 $N_2(y, z)$ 为样品两表面的面形函数。

对(O_0, O_3)，求得透射干涉条纹的干涉方程：

$$(n-1)\Delta h+h\Delta n=\frac{1}{2}\Delta m_t\lambda \tag{1}$$

$$\Delta n=\frac{1}{2h}[\Delta m_t\lambda-2(n-1)\Delta h] \tag{2}$$

Δm_t 为透射干涉条纹级序变化量，Δh 包括面形不平度和楔形差。当样品加工很好时，$\Delta h\to 0$，(8)式可近似为：

$$\Delta n=\frac{1}{2h}\Delta m_t\lambda \tag{3}$$

对(O_1, O_2)，得到样品反射干涉条纹的干涉方程：

$$h\Delta n+n\Delta h=\frac{1}{2}m_r\lambda \tag{4}$$

$$\Delta n=\frac{1}{2h}(m_r\lambda-2n\Delta h) \tag{5}$$

Δh 可表示为面形函数和楔差之和，

$$\Delta h=[N_1(y, z)+N_2(y, z)]\lambda+\frac{m_r'\lambda}{2n} \tag{6}$$

对(O_0, O_1)，得到样品第一表面干涉方程

$$\Delta N_1(y, z)=\frac{1}{2}m_1\lambda \tag{7}$$

即干涉条纹的变化完全取决于样品表面加工平整度。

对第二表面，可得到关于(O_0, O_2)的干涉方程

$$\Delta N_2(y, z)=\frac{1}{2}m_2\lambda \tag{8}$$

上述各式所属的干涉条级数，其正负一般可由实验确定。

由式(2)和(5)可以看出，若要精确测定材料内部的折射率分布 Δn，必然涉及到 Δh、$N_1(y, z)$、$N_2(y, z)$ 和样品楔角 $\theta=\frac{\lambda}{2na}$($a$ 为反射条纹间隔)。目前，Δh、N_1、N_2 和 θ 的精确测定比较困难，即使某一量单独可精确测定，各量在样品上逐点正确组合也很困难。在实际测量中，一般对样品提出较高的加工要求。为了克服这一困难，近年来出现了光学材料均匀性的全息干涉检验法[1~3]。文献[1]可同时测定 Δn 和 Δh，文献[2]和[3]则是分别测定 Δn 和 Δh。同时，全息干涉法也有一定局限性，测定过程较麻烦，目前还难以普遍推广使用。如果采用普通照相术，能将公式(1)和(4)所代表的两组干涉条纹正确地重合在一起，那么(1)和(4)即可联立求解，得到 Δn 和 Δh 的计算式：

$$\Delta n=\frac{\lambda}{2h}[m_tn+(1-n)m_r] \tag{9}$$

$$\Delta h=\frac{\lambda}{2}(m_r-m_t) \tag{10}$$

设 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 各代表 m_r、m_t、Δn 和 Δh 增加方向单位矢，(9)和(10)可写成：

$$\Delta n\boldsymbol{N}=\frac{\lambda}{2h}[m_t\boldsymbol{T}+(1-n)m_r\boldsymbol{R}] \tag{9'}$$

$$\Delta h\boldsymbol{H}=\frac{\lambda}{2h}[m_r\boldsymbol{R}-m_t\boldsymbol{T}] \tag{10'}$$

也可写成另一种矢量形式：

$$\operatorname{grad} n=\frac{\lambda}{2h}[n\nu_t\boldsymbol{T}+(1-n)\nu_r\boldsymbol{R}] \tag{11}$$

$$\operatorname{grad} h=\frac{\lambda}{2}(\nu_r\boldsymbol{R}-\nu_t\boldsymbol{T}) \tag{12}$$

ν_r 和 ν_t 为反射条纹和透射条纹的条纹密度，$\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 为各自的法向单位矢量。(11)和(12)是测定折射率分布的普遍公式，(9)和(10)表示两点间的差值，是(11)和(12)的积分结果。

下面分几种情况讨论式(11)和(12)：

(1) $\operatorname{grad} n=0$, $(\operatorname{grad} h\neq 0)$

由(11)式得到：

$$n\nu_t\boldsymbol{T}+(1-n)\nu_r\boldsymbol{R}=0$$

$$n\nu_t\boldsymbol{T}=(n-1)\nu_r\boldsymbol{R}$$

两非零矢量相等，必共线，即 $\boldsymbol{T}\parallel\boldsymbol{R}$。但可能有两种情况，同向平行 ($\boldsymbol{R}\uparrow\uparrow\boldsymbol{T}$) 和反向平行($\boldsymbol{R}\uparrow\downarrow\boldsymbol{T}$)。

$\boldsymbol{R}\uparrow\uparrow\boldsymbol{T}$ 时：

$$n\nu_t=(n-1)\nu_r$$

$$\nu_t/\nu_r=(n-1)/n,\quad \left(\frac{m_t}{m_r}=\frac{n-1}{n}\right) \tag{13}$$

$\boldsymbol{R}\uparrow\downarrow\boldsymbol{T}$ 时：

$$n\nu_t=(1-n)\nu_r$$

$$\nu_t/\nu_r=(1-n)/n,\quad \left(\frac{m_t}{m_r}=\frac{1-n}{n}\right) \tag{14}$$

(2) $\operatorname{grad} h=0$, $(\operatorname{grad} n\neq 0)$

由(12)得到：

$$\nu_r\boldsymbol{R}-\nu_t\boldsymbol{T}=0$$

$$\nu_r\boldsymbol{R}=\nu_t\boldsymbol{T}$$

$\boldsymbol{R}\uparrow\uparrow\boldsymbol{T}$ 时， $\nu_r=\nu_t$

$\boldsymbol{R}\downarrow\uparrow\boldsymbol{T}$ 时， $\nu_r=-\nu_t$

(3) $\operatorname{grad} n+\dfrac{1}{h}\operatorname{grad} h=0$

此时，必有：

$$\begin{cases} |\operatorname{grad} n|=\dfrac{1}{h}|\operatorname{grad} h| \\ \boldsymbol{N}\uparrow\downarrow\boldsymbol{H}\ \text{(反向平行)} \end{cases} \tag{15}$$

$\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别为 $\operatorname{grad} n$ 和 $\operatorname{grad} h$ 的法向单位矢量。此时，$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{T}$ 四矢量共线。

$$\begin{aligned}|\operatorname{grad} n|^2&=\frac{\lambda^2}{4h^2}|n\nu_t\boldsymbol{T}+(1-n)\nu_r\boldsymbol{R}|^2\\&=\frac{\lambda^2}{4h^2}|n^2\nu_t^2+(1-n)^2\nu_r^2\\&\quad+2n\nu_t\nu_r(1-n)\cos\varphi|\end{aligned}$$

φ 为 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 的夹角，φ 取值为 0 或 π，所以，

$$|\operatorname{grad} n|=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2h}[n\nu_t+(1-n)\nu_r] \\ (\boldsymbol{R}\uparrow\uparrow\boldsymbol{T}) \\ \dfrac{\lambda}{2h}[n\nu_t-(1-n)\nu_r] \\ (\boldsymbol{R}\downarrow\uparrow\boldsymbol{T})\end{cases} \tag{16}$$

同样得到：

$$\frac{1}{h}|\operatorname{grad} h|=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2h}(\nu_r-\nu_t) \\ (\boldsymbol{R}\uparrow\uparrow\boldsymbol{T}) \\ \dfrac{\lambda}{2h}(\nu_r+\nu_t) \\ (\boldsymbol{R}\uparrow\downarrow\boldsymbol{T})\end{cases} \tag{17}$$

随着 φ 角的不同，两组条纹的调制比不同。测量时必须十分注意

(4) $\operatorname{grad} n\neq 0$, $\operatorname{grad} h\neq 0$ 的一般情况，

当 $\cos\varphi>0$，即 $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ 时，

$$|\operatorname{grad} n|=\frac{\lambda}{2h}[\nu_t^2n^2+(1-n^2)^2\nu_r^2+2\nu_r\nu_t(1-n)n\cos\varphi]^{1/2}$$

$$|\operatorname{grad} h|=\frac{\lambda}{2}[\nu_r^2+\nu_t^2-2\nu_r\nu_t\cos\varphi]^{1/2}$$

或者

$$|\Delta n|=\frac{\lambda}{2h}[n^2m_t^2+(1-n)^2m_r^2+2m_rm_tn(1-n)\cos\varphi]^{1/2}$$

$$|\Delta h|=\frac{\lambda}{2}[m_r^2+m_t^2-2m_rm_t\cos\varphi]^{1/2}$$

当 $\cos\varphi<0$，即 $\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{3\pi}{2}$ 时，

$$|\operatorname{grad} n|=\frac{\lambda}{2h}[\nu_t^2n^2+(1-n)^2\nu_r^2-2n\nu_r\nu_t(1-n)\cos\varphi]^{1/2}$$

$$|\operatorname{grad} h|=\frac{\lambda}{2}[\nu_r^2+\nu_t^2+2\nu_r\nu_t\cos\varphi]^{1/2}$$

或者：

$$|\Delta n|=\frac{\lambda}{2h}[m_t^2n^2+(1-n)^2m_r^2-2nm_rm_t(1-n)\cos\varphi]^{1/2}$$

$$|\Delta h|=\frac{\lambda}{2}[m_r^2+m_t^2+2m_rm_t\cos\varphi]^{1/2}$$

显然，只有当两组条纹的走向一致时，才能得到式(9)和(10)，多数情况是表示 $\boldsymbol{m}_r$ 和 $\boldsymbol{m}_t$ 在同一方向上的投影。$\boldsymbol{m}_r$ 和 $\boldsymbol{m}_t$ 走向完全一致只是一种特殊情况。

$$m_t=\int_0^s \nu_t\cos(\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{S})ds$$

$$m_r=\int_0^s \nu_r\cos(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{S})ds$$

$\boldsymbol{S}$ 为计算路径的方向矢量，$\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 均投影于 $\boldsymbol{S}$ 上，成为共线矢量。从而，(9)和(10)方能成立。

由上面几种情况的讨论可以看出，随着两组条纹的走向不同(φ 角不同)，$\mathrm{grad}\,n$ 和 $\mathrm{grad}\,h$(或 Δn 和 Δh)的计算结果不同。为此必须从实验上确定 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的走向。这在实际上是可做到的。$\boldsymbol{H}$ 的走向用平行光管容易知道。$\boldsymbol{N}$ 的取向可用局部加热法测出，如图3所示。当玻璃局部加热时，条纹弯向低折射率方向。另外，也可对方程(11)和(12)给出一定的边界条件，使之有定解。这些条件主要是通过控制样品的加工精度(楔差和平度)来达到。下面推导这些边界条件。

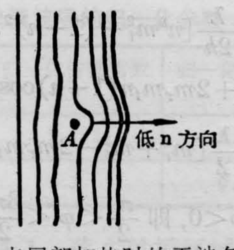


图3　A 点局部加热时的干涉条纹变化

令下列两方程：

$$\begin{cases} h\,\mathrm{grad}\,n+(n-1)\,\mathrm{grad}\,h=\dfrac{1}{2}\nu_t\boldsymbol{T}\lambda & (18)\\ h\,\mathrm{grad}\,n+n\,\mathrm{grad}\,h=\dfrac{1}{2}\nu_r\boldsymbol{R}\lambda & (19)\end{cases}$$

同时大于零，得到：

$$\begin{cases} h\,\mathrm{grad}\,n+(n-1)\,\mathrm{grad}\,h>0 & (20)\\ h\,\mathrm{grad}\,n+n\,\mathrm{grad}\,h>0 & (21)\end{cases}$$

由(20)看出：

$$|h\,\mathrm{grad}\,n+(n-1)\,\mathrm{grad}\,h|>0$$

$$[h^2(\mathrm{grad}\,n)^2+(n-1)^2(\mathrm{grad}\,h)^2+2h(n-1)\,\mathrm{grad}\,n\,\mathrm{grad}\,h\cos\alpha]^{1/2}>0$$

α 为 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的夹角，$-1<\cos\alpha<1$，取 $\cos\alpha=-1$，可确保上式大于零，上式变为

$$\pm[h\,\mathrm{grad}\,n-(n-1)\,\mathrm{grad}\,h]>0$$

取“+”根，

$$\mathrm{grad}\,h<\frac{h}{n-1}\mathrm{grad}\,n \qquad (22)$$

取“-”根，

$$\mathrm{grad}\,h>\frac{h}{n-1}\mathrm{grad}\,n \qquad (23)$$

同样由式(21)得到

$$\mathrm{grad}\,h<\frac{h}{n}\mathrm{grad}\,n \quad (\text{取“+”根}) \qquad (24)$$

$$\mathrm{grad}\,h>\frac{h}{n}\mathrm{grad}\,n \quad (\text{取“-”根}) \qquad (25)$$

能同时满足不等式(20)和(21)的 $\mathrm{grad}\,h$ 为：

$$(\mathrm{i})\qquad \mathrm{grad}\,h<\frac{h}{n}\mathrm{grad}\,n \qquad (26)$$

$$(\mathrm{ii})\qquad \mathrm{grad}\,h>\frac{h}{n-1}\mathrm{grad}\,n \qquad (27)$$

若令原方程同时小于零，可得到同样结果。

显然 $\mathrm{grad}\,h$ 和 $\mathrm{grad}\,n$ 均有一个取向问题，其值可正，也可负。所以(26)和(27)仍为不定式。前面说过，用实验可确定其走向，但较麻烦。如果能够取 $\mathrm{grad}\,h>0$ 或 $\mathrm{grad}\,h<0$ 二者之中的一种情况，(26)和(27)便完全确定。$\mathrm{grad}\,h$ 的走向在样品加工时即可确定。不妨取 $\mathrm{grad}\,h>0$，这样便可得出方程(18)和(19)的定解边界条件：

$$|\Delta h|>\frac{h}{n-1}|\Delta n|，\text{或}\ |\Delta h|<\frac{h}{n}|\Delta n|$$

时，m_r 和 m_t 取同号；$\dfrac{h}{n}|\Delta n|<|\Delta h|<\dfrac{h}{n-1}|\Delta n|$ 时，m_r 和 m_t 取相反符号。

Δh 的正负应已知。

另外，为了计算方便，样品的表面不平度应小于 $\frac{\lambda}{2}$。

在样品加工时，$|\Delta h|<\frac{h}{n}|\Delta n|$ 的条件较难达到，而 $|\Delta h|>\frac{h}{n-1}|\Delta n|$ 容易实现。

对于三面无条纹、应力双折射不低于二级的大尺寸光学玻璃，其均匀性一般可进入三级范围，即 $\Delta n<\pm1\times10^{-5}$。按上述条件，这种玻璃样品的加工要求是：

$$\Delta h>\frac{h}{n-1}\,\Delta n$$

若 $h=50$ 毫米，$n=1.5163$，则

$$\Delta h>1 \quad (\text{微米})$$

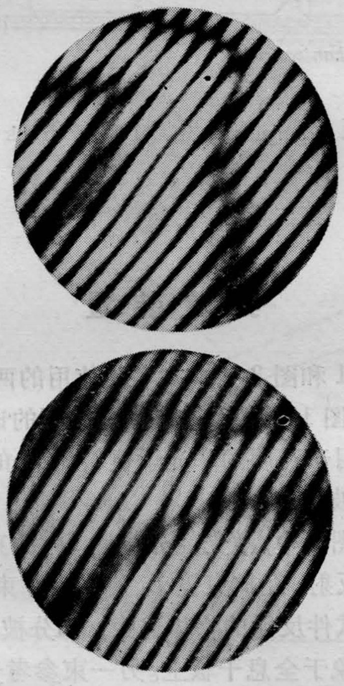


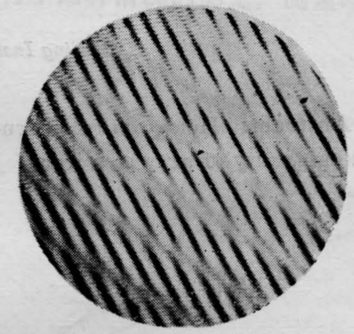
图 4　斐索干涉图

$K_9\phi80\times50$，均匀性 4 级

样品两表面不平行度大于 1 微米是容易加工的。当然，楔角也不能太大，太大了，条纹太密，计算困难，一般有十秒左右楔角就可以了。当然，Δh 不允许有局部突变，这在面形平度上应给予保证。

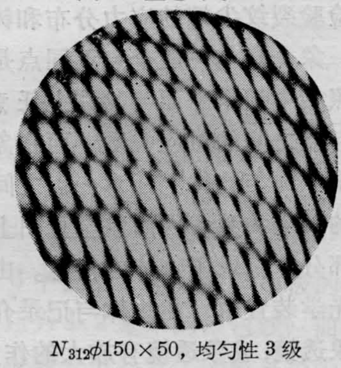
组合干涉图形术在全息干涉测量中已得到广泛应用。我们采用组合图形法，测定了几块光学玻璃的均匀性。图 4 是两块 K_9 玻璃的斐索干涉图。由干涉图既可测出样品平行度；也可看出材料内部折射率的不均匀分布，$\Delta n>1\times10^{-5}$。因该玻璃有条纹存在，条纹本身的折射率梯度较大，约为 10^{-4} 量级。图 5 是一块钕玻璃的全息干涉图。图 6 是同块玻璃的台曼干涉图。计算结果表明，玻璃的均匀性为三级，$\Delta n\approx6\times10^{-6}$。

不论是全息组合干涉图，还是普通组合干涉图，其主要特点是能够同时测定出 Δn 和 Δh，使 Δn 的测量精度明显提高。同时样品的加工要求也有所降低。



$N_{312}\phi150\times50$，均匀性 3 级

图 5　全息干涉图



$N_{312}\phi150\times50$，均匀性 3 级

图 6　台曼干涉图

参 考 文 献

[1] 四川大学等，《激光》，1976，**3**，No. 6，18.

[2] I. M. Siddiqui; *Optica Acta*, 1978, **25**, No. 8, 737.

[3] A. Masumura; *Opt. and Laser Tech.*, 1971, **3**, No. 1, 36.