

# 关于四面镜腔参数的计算

**Abstract:** Four-mirror cavity is widely used in contemporary ring lasers or laser gyroes.

The paper gives the methods for calculating cavity parameters and the frequencies of different modes. Practical examples are given on calculation and analysis of "8"-shaped four mirror cavity in a differential ring laser.

众所周知, 环形激光最重要的应用之一是用来制成激光陀螺, 而从近十余年来国内外各种激光陀螺的发展情况与趋势来看, 作为其核心部份的环形激光器的谐振腔, 几乎无例外地全由三面镜或四面镜腔所构成, 而其中四面镜腔应用的广泛性并不亚于三面镜腔, 例如在四频差动激光陀螺及在某些二频激光陀螺中均采用四面镜腔。本文重点阐述用矩阵法计算四面镜腔参数及用衍射法计算腔频率的方法, 并以分析与实算“8”字形四面镜腔为例加以说明。

## 一、矩阵法求解

线性光学理论表明, 光学系统的光学传输特性可用该系统的光学传递矩阵来加以表示, 而如果光学系统是由一系列光学元件串联而成, 则光学传递矩阵便等于各个光学元件传递矩阵的连乘积, 有:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} \\ C_{n-1} & D_{n-1} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

在用几何光学法研究光线在谐振腔中传播的情形时, 正是利用上述这一特性把光线在腔中被镜子多次反射, 看成是光线多次通过由等效光学元件组成的等效光学系统, 在这一点上对环形腔的处理除了非傍轴入射与镜面数较多外与直腔十分类似, 例如同样可把光线在腔中被曲率半径为  $R$  的凹面镜 (光学传递矩阵为  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$ ) 反射一次等效成光线

通过焦距为  $f = \frac{R}{2}$  的薄透镜。其次, 当参考面不同时, 所对应的总的矩阵也不相同, 在对多面镜腔 (环形腔与折迭腔) 求解时, 也正可利用这一点, 通过迭次移动参考面的办法来求出与其相应的一系列矩阵, 再通过由矩阵元推求腔参数的公式, 便可求得诸参考面上及与被选定参考面相毗连的那一段光路

(遇到光学元件之前) 的光束参数, 显而易见, 当沿环路参考面移动完所有段落时, 全部段落的腔参数也即均被求出。例如光斑半径  $\omega$  为:

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{\pi} \frac{2B}{\sqrt{4 - (A+D)^2}} \quad (1)$$

再利用由  $z$  处高斯光束半径  $\omega$  与波阵面曲率半径  $R$  来描述束腰半径  $\omega_0$  与  $z$  的公式:

$$\omega_0^2 = \frac{\omega^2}{\left[1 + \left(\frac{\pi\omega^2}{\lambda R}\right)^2\right]} \quad (2)$$

$$z = \frac{R}{\left[1 + \left(\frac{\lambda R}{\pi\omega^2}\right)^2\right]} \quad (3)$$

$$R = \frac{2B}{D-A} \quad (4)$$

并把(1)、(4)两式代入, 则可得:

$$\omega_0^2 = -\frac{\lambda}{\pi} \frac{\sqrt{4 - (A+D)^2}}{2C} \quad (5)$$

图1为任意四面镜腔。在计算时依前述可将其等效展开成周期性透镜序列, 如图2所示。总的传递矩阵<sup>[5]</sup>:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L_4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

注意在具体计算时应考虑到环形腔为一象散腔, 对每面反射镜而言, 子午面与弧矢面内的焦距不同, 并分别为<sup>[5]</sup>:

$$f_{i\omega} = \frac{R_i}{2} \cos \theta_i$$

$$f_{i\nu} = \frac{R_i}{2} \sec \theta_i \quad (\theta \text{ 为入射角}) \quad (7)$$

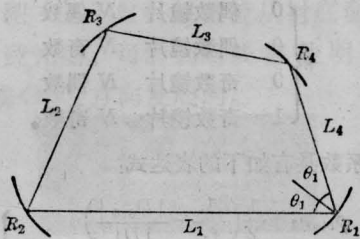


图 1

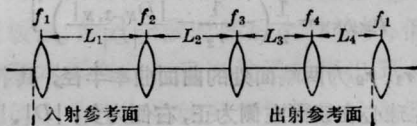


图 2

对于实用的四面镜环形腔而言,最常见的形式为规则、对称的,以四频差动激光陀螺为例,最普遍采用的是二平二凹的“8”字形腔(见图3)。之所以采用“8”字形是为了减小光的入射角以利于圆偏振光的振荡,又由于对转动当量而言两对顶三角形的面积是相抵消的,所以总是尽可能地减小上三角形的面积而形成图3所示意的布置,此时的几何参数为:

$$L_3 = f_3^{-1} = 0$$

$$L_4 = f_4^{-1} = 0$$

$f_1 = f_2 = f$  (具体取  $f_x$  与  $f_y$  按 (7) 式计算)

其等效透镜序列见图4。根据光学元件的光线传输矩阵元<sup>[1]</sup>对(a)有:

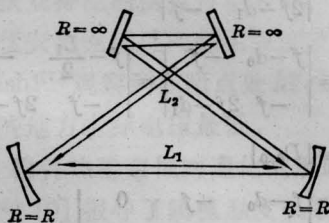


图 3

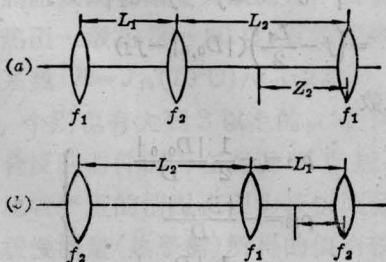


图 4

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 1 - \frac{L_1}{f} - \frac{2L_2}{f} + \frac{L_1L_2}{f^2} \\ B_1 &= (L_1 + L_2) - \frac{L_1L_2}{f} \\ C_1 &= -\frac{2}{f} + \frac{L_1}{f^2} \\ D_1 &= 1 - \frac{L_1}{f} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

对(b)有:

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= 1 - \frac{L_2}{f} - \frac{2L_1}{f} + \frac{L_2L_1}{f^2} \\ B_2 &= (L_2 + L_1) - \frac{L_2L_1}{f} \\ C_2 &= -\frac{2}{f} + \frac{L_2}{f^2} \\ D_2 &= 1 - \frac{L_2}{f} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

将它们分别代入(1)~(5)式中便可求得两个腰的位置与大小,凹面镜处的  $R$  与  $\omega$  及稳定性判断。不过,对于稳定性判据而言,即使对于图3所示的非任意形状与参数的四面镜“8”字形腔,也由于仍存在  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $R$ (或等效  $f$ )三个变量而使由稳定性判据不能给出更明晰的概念,为使稳定性判据与可变量的关系更密切而简捷地联系起来,可把可变量  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $f$  改变为  $L_1$ 、 $K$ 、 $f$ , 其中  $L_2 = KL_1$ ,  $K$  为一比例系数,此时不难证明稳定性条件可化为:

凡  $L_1$  满足

$$\left. \begin{aligned} L_1 &\leq 2f \left( \frac{K+1}{K} \right) \\ L_1 &\geq 2f \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

或

$$L_1 \leq \frac{2f}{K} \quad (11)$$

的腔为稳定腔。用图表示见图5,由图可明显看出:

1. 对实际腔而言,  $f$  分别取  $f_x$ 、 $f_y$  值,由于  $f_x$  恒小于  $f_y$ ,故实际的稳定区为图中的虚线区,比实线区略为缩小。

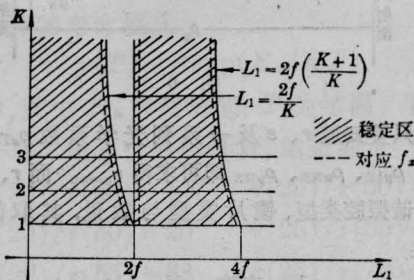


图 5

2. 对相同的凹镜而言(即  $f$  取定值),  $K$  值越大 ( $L_2$  比  $L_1$  越大) 稳定区越缩小。当  $K$  达到最小值  $K=1$  (理论极值, 此时  $L_2=L_1$ ) 时稳定区达到最大。

3. 只要  $K>1$ , 稳定区就分成两部份, 即  $L_1$  有两段取值范围。

## 二、腔频率的计算

对激光陀螺零漂规律及机理所进行的大量研究工作表明, 模间耦合是十分重要的零漂误差源之一, 因此在进行腔设计选取腔参数时, 除从增益、尺寸、工艺等角度加以考虑外, 必须尽可能使各种可能出现的模式间(纵—纵, 纵—横, 横—横)的耦合度减至最低。为此需要首先计算出在给定腔参数下所有模式的频率分布, 并进而设法通过合理选择腔参数, 使它们尽可能地彼此远离与不需要的模式受到抑制。

由于环形腔可以等效展成周期性透镜序列, 所以只要应用能计算含有聚焦元件光学谐振腔频率的方法, 便能求得环形腔所有模式的谐振频率。

对于含有  $N-1$  个彼此间相距为  $d_1, d_2 \dots d_{N-2}$ , 其焦距分别为  $f_1, f_2 \dots f_{N-1}$  的聚焦元件的谐振腔(见图 6), 其谐振频率可表示为:

$$\nu_{qmn} = \frac{c}{2\rho_0} \left[ rq + \left( n - \frac{1}{2} \right) \frac{a_x}{\pi} + \varepsilon + \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{a_y}{\pi} \right] \quad (12)$$

其中  $\rho_0$  为腔的直线尺寸。

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \cos^{-1} \sqrt{\frac{4\rho_{x11}\rho_{xNN}}{\rho_{x1N}}} \\ a_y &= \cos^{-1} \sqrt{\frac{4\rho_{y11}\rho_{yNN}}{\rho_{y1N}}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

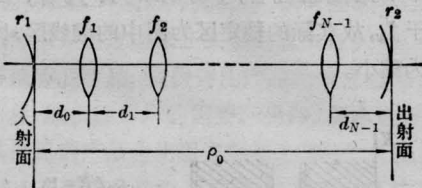


图 6

因此只要知道  $r, \varepsilon$  及一系列光学系数  $\rho_{x11}, \rho_{y11}, \rho_{x1N}, \rho_{y1N}, \rho_{xNN}, \rho_{yNN}$  即可求得  $\nu_{qmn}$ 。而  $r, \varepsilon$  则取决于谐振腔类型、镜片类型与数量, 其取值规则如下:

$$r \begin{cases} 1 & \text{直腔} \\ 2 & \text{环形腔} \end{cases}$$

$$\varepsilon \begin{cases} 0 & \text{偶数镜片 } N \text{ 偶数} \\ 0 & \text{偶数镜片 } N \text{ 奇数} \\ 0 & \text{奇数镜片 } N \text{ 偶数} \\ 1 & \text{奇数镜片 } N \text{ 奇数} \end{cases}$$

诸光学系数具有如下的表达式:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{x(y)11} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{|D_{0,0}|}{|D|} \right) \\ \rho_{x(y)1N} &= (-1)^N \frac{|D_{0,N}|}{|D|} \\ \rho_{x(y)NN} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r_2} - \frac{|D_{N-1,N}|}{|D|} \right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中  $r_1, r_2$  为两端面处的曲面曲率半径, 其符号规定为: 球心在镜面左侧为正, 右侧为负,  $|D|, |D_{0,0}|, |D_{0,N}|, |D_{N-1,N}|$  为由透镜序列原始数据  $d_0, d_1 \dots d_{N-1}, f_1, f_2 \dots f_{N-1}$  来加以计算的行列式(见附录), 至此, 便已能通过等效透镜序列的原始数据最终求得谐振频率  $\nu_{qmn}$ 。

以图 7(a) “8” 字形腔为例, 取参考面在底边中点, 其等效透镜序列示于图 7(b), 几何参数为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} &= 0, \quad N=3, \quad f_1=f_2=f, \\ d_0=d_2 &= \frac{L_1}{2}, \quad d_1=L_2, \end{aligned}$$

可得:

$$\left. \begin{aligned} |D_{0,0}| &= \begin{vmatrix} 2f-d_1 & -f \\ -f & f-d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2f-L_2 & -f \\ -f & f-\frac{L_1}{2} \end{vmatrix} \\ |D_{0,3}| &= \begin{vmatrix} -f & 0 \\ 2f-d_1 & -f \end{vmatrix} = f^2 \\ |D_{2,3}| &= \begin{vmatrix} f-d_0 & -f \\ -f & 2f-d_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f-\frac{L_1}{2} & -f \\ -f & 2f-L_2 \end{vmatrix} \\ &= |D_{0,0}| \\ |D| &= \begin{vmatrix} f-d_0 & -f & 0 \\ -f & 2f-d_1 & -f \\ 0 & -f & f-d_2 \end{vmatrix} \\ &= \left( f - \frac{L_1}{2} \right) (|D_{0,0}| - f^2) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

光学系数

$$\left. \begin{aligned} \rho_{11} &= -\frac{1}{2} \frac{|D_{0,0}|}{D} \\ \rho_{13} &= -\frac{|D_{0,3}|}{D} \\ \rho_{33} &= -\frac{1}{2} \frac{|D_{2,3}|}{D} = \rho_{11} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

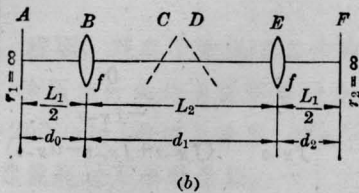
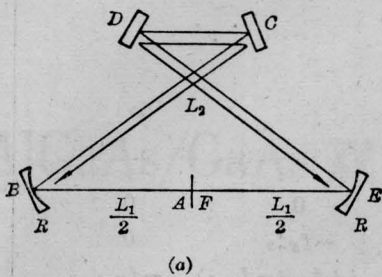


图 7

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{x(y)} &= \sqrt{\frac{4\rho_{x(y)11}\rho_{x(y)33}}{\rho_{x(y)13}^2}} = \frac{2\rho_{x(y)11}}{\rho_{x(y)13}} \\ &= \frac{|D_{0,0}|_{f=fx(y)}}{|D_{0,3}|_{f=fx(y)}} \end{aligned} \quad (17)$$

谐振频率为:

$$\begin{aligned} \nu_{qmn} &= \frac{c}{2L} \left[ 2q + \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{a_x}{\sigma} \right. \\ &\quad \left. + \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{a_y}{\sigma} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

$$|D| = \begin{vmatrix} (f_1 - d_0) & -f_1 & 0 & 0 & & \\ -f_1 & (f_1 + f_2 - d_1) & -f_2 & 0 & & \dots \\ 0 & -f_2 & (f_2 + f_3 - d_2) & & & \\ & 0 & -f_3 & & & \vdots \\ & & & & & 0 \\ & & & & & -f_{N-1} \\ 0 & -f_{N-1} & (f_{N-1} - d_{N-1}) & & & \end{vmatrix}$$

$$|D_{0,0}| = \begin{vmatrix} (f_1 + f_2 - d_1) & -f_2 & 0 & & & \\ -f_2 & (f_2 + f_3 - d_2) & -f_3 & & & \\ 0 & -f_3 & & & & \vdots \\ & 0 & & & & 0 \\ & & & & & -f_{N-1} \\ 0 & -f_{N-1} & (f_{N-1} - d_{N-1}) & & & \end{vmatrix}$$

横纵模间频率间隔

$$\left. \begin{aligned} \Delta\nu_{\Delta q} &= \frac{c}{L} \Delta q \\ \Delta\nu_{\Delta n} &= \frac{c}{L} \left( \Delta n \frac{a_x}{\sigma} \right) \\ \Delta\nu_{\Delta m} &= \frac{c}{L} \left( \Delta m \frac{a_y}{\sigma} \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

至此, 已完成了“8”字形环形腔所有模式频率的计算, 为了更进一步分析其腔参数的选择对谐振频率的影响, 将(17)式具体写出应有:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|D_{0,0}|}{|D_{0,3}|} = \frac{(2f - L_2) \left( f - \frac{L_1}{2} \right) - f^2}{f^2} \\ &= (L - L_1) \frac{L_1}{2f^2} - L \frac{1}{f} + 1 \end{aligned} \quad (20)$$

因为  $\frac{d[(L - L_1)L_1]}{dL_1} = L - 2L_1$ , 所以当  $L_1 = \frac{L}{2}$  时  $\cos \alpha$  具有极大值(相当于前述  $K=1$  情形), 亦即相位移  $\alpha$  具有极小值, 因此可见:

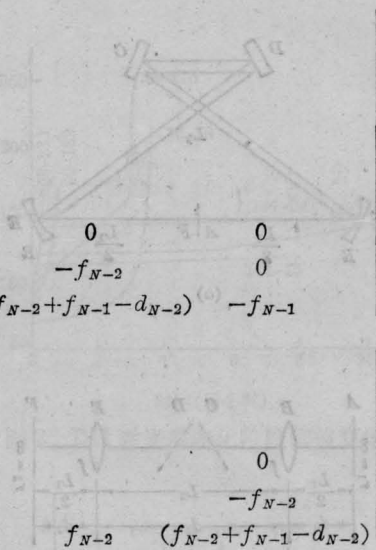
1.  $K = \frac{L_1}{L_2}$  值越小(即  $L_1$  与  $L_2$  越接近), 对同一纵模(即同一  $q$ )的不同横模间频率差越小, 即越接近横模谐振频率值简并情形。

2. 从凹面镜曲率半径的取值来看, 则  $R$  越大(亦即  $f$  越大), 越接近上述横模简并情形, (20)式表明当  $f = \infty$  亦即整个环形腔全用平面镜时  $\cos \alpha = 1$ ,  $\alpha = 0$ , 为全简并情形。

附录:  $|D|$   $|D_{0,0}|$   $|D_{0,N}|$   $|D_{N-1,N}|$  行列式

$$|D_{0,N}| = \begin{vmatrix} -f_1 & 0 & \dots \\ (f_1+f_2-d_1) & -f_2 & \\ -f_2 & (f_2+f_3-d_2) & \\ 0 & -f_3 & \\ \vdots & 0 & \\ \vdots & 0 & \\ \vdots & 0 & \\ -f_{N-2} & (f_{N-2}+f_{N-1}-d_{N-2}) & -f_{N-1} \end{vmatrix}$$

$$|D_{N-1,N}| = \begin{vmatrix} (f_1-d_0) & -f_1 & 0 & \dots \\ -f_1 & (f_1+f_2-d_1) & -f_2 & \\ 0 & -f_2 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$



### 参 考 文 献

- [1] H. Kogelnik, T. Li; *Appl. Opt.*, 1966, **5**, No. 10, 1550~1567.
- [2] C. P. Wang, R. L. Sandstrom; *Appl. Opt.*, 1975, **14**, No. 6, 1285~1289.
- [3] W. W. Rigrod; *BSTJ*, 1965, **44**, No. 5, 909~

- 916.
- [4] S. A. Jr. Collins; *Appl. Opt.*, 1964, **3**, No. 11, 1263~1275.
- [5] 激光物理编写组;《激光物理学》,上海人民出版社, 1972年.

(中国计量科学研究院 廖复中  
1980年11月10日收稿)

## GaAs 电光调相器

**Abstract:** This paper describes the principle, design and construction of the GaAs electron-optic phase modulator. The expression for voltage has been derived on both ends of the modulated crystal as a function of matching circuit parameter and the output power of the modulating source. The measuring technique and experimental results are presented.

### 原理与结构

所谓电光调相,就是利用电光晶体(即介质)的折射率随着外加电场而变化的性质(称为电光效应)来实现对光波进行相位调制。

对于 CO<sub>2</sub> 激光光波而言,其波长为 10.6 微米。在该波长上的电光晶体有硫化锌(ZnS)、氯化铜(CuCl)、碲化镉(CdTe)和砷化镓(GaAs)等。目前国内用得较多的是 GaAs 晶体。它属于 43m 晶系。线性电光系数  $\gamma_{41} = 1 \times 10^{-7}$  厘米/千伏。

图 1 所示是 GaAs 电光调相器原理装置图。其中(110)、 $(\bar{1}\bar{1}0)$ 和(001)分别表示 GaAs 晶体的三个

切割面。晶体的长度为  $l$ ,厚度为  $d$ 。在晶体的[110]方向加电场(即加调制电压)。

当直线偏振光的传播方向沿 GaAs 晶体的  $y$  轴,而其偏振方向与  $x$  轴、 $z$  轴均为  $45^\circ$  时,则引起光波

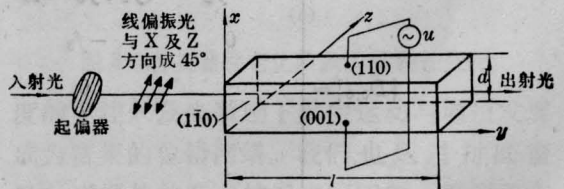


图 1 GaAs 电光调相器