

发散纤维的光学特性

殷 宗 敏

(中国科学院西安光机所)

提要: 本文讨论一种发散型光学纤维, 它类似于凹透镜。给出了纤维中光线的轨迹、聚焦的焦距、象距、线放大率和纤维的有效长度等计算公式。

Optical characteristics of diverging fibres

Yin Zongmin

(Xian Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: This paper describes a diverging fibre that is analogous to a concave lens. The ray paths in the fibre and the formulae for calculation of focal length, image distance, linear magnification and effective length of fibre are given.

聚焦型光学纤维近年来已为大家所熟悉, 这种纤维在垂直于纤维轴的横截面上, 折射率分布自轴心沿径向逐渐变小^[1~4]。轴上折射率最大, 边缘折射率最小。子午光线在纤维中的轨迹是正弦曲线。还存在一种发散型光学纤维, 它的折射率分布和上述的相反, 在垂直于纤维轴的横截面上, 自轴心沿径向折射率逐渐增大。轴上折射率最小, 边缘折射率最大。折射率变化规律为(见图 1):

$$n = n_0 \left(1 + \frac{1}{2} A r^2 \right) \quad (1)$$

式中 n_0 是轴上折射率, A 是特性常数, r 是纤维上某点至轴的距离。现在来讨论光线在这种发散纤维中的传播。

设纤维轴向为 z , 垂直于轴的为 xy 面。由于我们是讨论圆柱形纤维, 所以取 r 为 x 轴, 这样(1)式就写为:

$$n = n_0 \left(1 + \frac{1}{2} A x^2 \right) \quad (1')$$

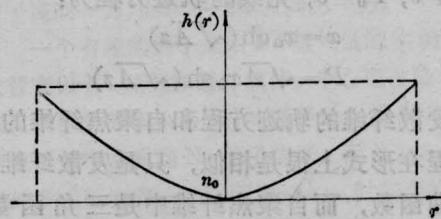


图 1 发散光学纤维的折射率分布

在非均匀介质中光线方程为:

$$\frac{d}{ds} \left[n \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) \right] = \nabla n$$

在 $x-z$ 平面内即有形式:

$$n \frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial z} \cdot \frac{dx}{dz} \quad (2)$$

设折射率 n 和 z 向无关, 又令 $\frac{1}{2} A x^2 \ll 1$, 则

解方程可得:

$$x = x_0 \operatorname{ch}(\sqrt{A} z) + P_0 / \sqrt{A} \operatorname{sh}(\sqrt{A} z) \quad (3)$$

收稿日期: 1981年7月23日。

$$P = \frac{dx}{dz} = x_0 \sqrt{A} \operatorname{sh}(\sqrt{A}z) + P_0 \operatorname{ch}(\sqrt{A}z) \quad (4)$$

式中 x_0 和 P_0 分别为入射光线在纤维端面 $z=0$ 处的位置和斜率。公式(3)、(4)说明光线在发散纤维中的轨迹是一种双曲函数形式的曲线。当入射光线的位置和斜率已知时,就能通过计算求得射出光线的位置和斜率。它的矩阵列式即为:

$$\begin{pmatrix} x \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\sqrt{A}z) & \frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{sh}(\sqrt{A}z) \\ \sqrt{A} \operatorname{sh}(\sqrt{A}z) & \operatorname{ch}(\sqrt{A}z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ P_0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

当入射光线在子午面内和纤维轴成 ϕ 角时(图 2(a)), 在纤维中光线和轴成 θ 角, 即此时 $x_0=0$, $P_0 = \operatorname{tg} \theta$, 这时光线轨迹方程为:

$$x = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{A}} \operatorname{sh}(\sqrt{A}z)$$

$$P = \operatorname{tg} \theta \operatorname{ch}(\sqrt{A}z)$$

当入射光线平行于纤维时(图 2(b)), 此时 $x_0 \neq 0$, $P_0=0$, 光线的轨迹方程为:

$$x = x_0 \operatorname{ch}(\sqrt{A}z)$$

$$P = \sqrt{A} x_0 \operatorname{sh}(\sqrt{A}z)$$

发散纤维的轨迹方程和自聚焦纤维的轨迹方程在形式上很是相似, 只是发散纤维中是双曲函数, 而自聚焦纤维中是三角函数。正因为如此, 所以就决定了发散纤维发散光线的特性。图 2 也示意地说明这个问题。

发散纤维中光线的轨迹既然是双曲函数的形式, 而这种函数的数值又将是随着 z 值的增加很快增加, 所以可以知道光线在纤维中随着传播距离增加, 很快就发散到纤维的边缘, 这段长度可以计算出来, 也就是当 x 值等于纤维半径 a 时的 z 值。我们以 $x=a$ 代入(3)式, 并把它化成指数函数, 可得:

$$\begin{aligned} \left(x_0 + \frac{P_0}{\sqrt{A}}\right) e^{2\sqrt{A}z} - 2ae^{\sqrt{A}z} \\ + \left(x_0 - \frac{P_0}{\sqrt{A}}\right) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

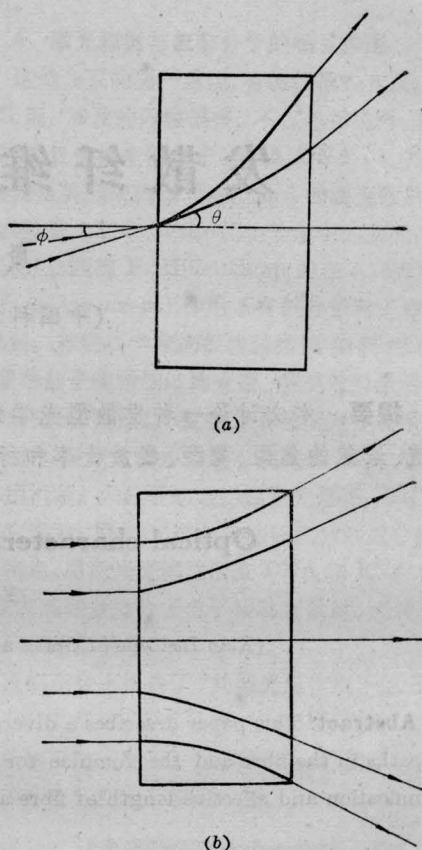


图 2 发散纤维中光线的轨迹

(a) 和轴有夹角的子午光线; (b) 平行于轴的光线

这是一个对 $e^{\sqrt{A}z}$ 的二次方程, 故而有:

$$e^{\sqrt{A}z} = \frac{a + \sqrt{a^2 - x_0^2 + \left(\frac{P_0}{\sqrt{A}}\right)^2}}{\left(x_0 + \frac{P_0}{\sqrt{A}}\right)} \quad (7)$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{A}} \ln \left[\frac{a + \sqrt{a^2 - x_0^2 + \left(\frac{P_0}{\sqrt{A}}\right)^2}}{\left(x_0 + \frac{P_0}{\sqrt{A}}\right)} \right] \quad (8)$$

这就是光线发散至纤维边缘时的纤维长度, 我们称之为发散纤维有效长度。当纤维在这个长度之内时, 光线以双曲函数形式传播。

现在我们以入射位置在 $x_0 = \frac{a}{2}$ 处、平行于纤维轴的光线为代表, 计算几种不同纤维直径的有效长度, 结果如表 1 所示。从表中

表 1 几种不同直径发散纤维的有效长度

a	0.5	0.8	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.5	3.0	毫米
\sqrt{A}	1.2	0.75	0.60	0.55	0.50	0.46	0.43	0.40	0.38	0.35	0.33	0.32	0.30	0.24	0.20	1/毫米
z	1.1	1.8	2.2	2.4	2.6	2.9	3.1	3.3	3.5	3.8	4.0	4.1	4.4	5.5	6.6	毫米

可看出, 发散纤维的有效长度随着纤维直径的增加明显变大。表 1 中纤维半径 a 和折射率变化特性常数 A 的取值是依据通常情况下 Δn (即纤维中心折射率和边缘折射率之差) 的取值而定。由于 $\Delta n = n_0 \frac{1}{2} A a^2$, 所以纤维半径 a 越大, 特性常数 A 就越小。

现在我们来讨论发散光学纤维的成象特性。设目标位于纤维入射端前 L_0 处, 其高为 x_0 , 如图 3 所示。为了简便, 令目标一端位于纤维轴上。考虑两条光线, 一条 a 光线平行于纤维中心轴, 其入射位置为 x_0 , 斜率为 0; 另一条 b 光线和轴成一定角度, 其入射位置 $x_0=0$, 斜率 $\text{tg } \phi = -x_0/L_0$ 。应用近轴光线关系: $n' \text{tg } \phi = n_0 \text{tg } \theta$, 设 $n'=1$, 则进入纤维后 $\text{tg } \theta = -x_0/n_0 L_0$ 。如果求得 a 、 b 光线出射处的位移和斜率, 这样就能得到两条光线的交点, 成象的位置也就确定了。

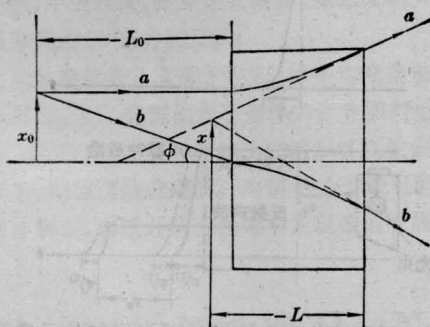


图 3 发散光学纤维的成象关系

根据轨迹方程可得: a 光线出射后的直线方程为:

$$[n_0 x_0 \sqrt{A} \text{sh}(\sqrt{A}z)]L - x = -x_0 \text{ch}(\sqrt{A}z) \quad (9)$$

同样, b 光线出射后的直线方程为:

$$\left[\frac{x_0}{L_0} \text{ch}(\sqrt{A}z) \right] L + x = -\frac{x_0}{n_0 L_0 \sqrt{A}} \text{sh}(\sqrt{A}z) \quad (10)$$

式中 L 和 x 即为象距和象高。联立方程 (9) 和 (10) 可得:

$$L = -\frac{n_0 L_0 \sqrt{A} \text{ch}(\sqrt{A}z) + \text{sh}(\sqrt{A}z)}{\left\{ \begin{array}{l} n_0 \sqrt{A} [n_0 \sqrt{A} L_0 \text{sh}(\sqrt{A}z) \\ + \text{ch}(\sqrt{A}z)] \end{array} \right\}} \quad (11)$$

$$x = \frac{x_0}{n_0 \sqrt{A} L_0 \text{sh}(\sqrt{A}z) + \text{ch}(\sqrt{A}z)} \quad (12)$$

由此可求得象的线放大率 m 为:

$$m = \frac{x}{x_0} = \frac{1}{n_0 \sqrt{A} L_0 \text{sh}(\sqrt{A}z) + \text{ch}(\sqrt{A}z)} \quad (13)$$

在物象公式中所用的正负号和透镜系统中是一样的。根据 (11) 和 (13) 式可知, 对于一定厚度 z 的发散纤维, 大多数情况总有: $L < 0$, $0 < m < 1$, 这就说明了在多数情况下, 发散光学纤维总是得正立、缩小的虚象, 这个结论和凹透镜的成象特性是一致的。

当平行于轴的光通过纤维时, 发散光线的延长线和轴相交于一点, 这就是焦点。设平行于轴的入射光线位置为 x_0 , 出射位置为 x , 如图 4 所示。则根据近轴光学关系可得:

$$\text{tg } \phi = n_0 \text{tg } \theta = n_0 \sqrt{A} x_0 \text{sh}(\sqrt{A}z) \quad (14)$$

这样就求得焦点与出射端面的距离 d , 这就是焦点位置。由图可知:

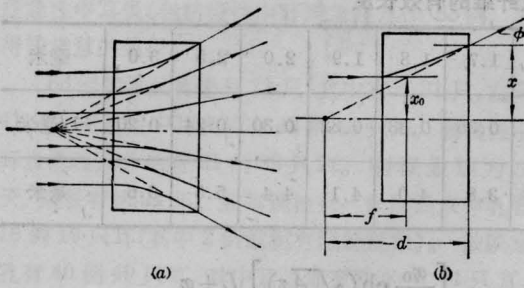


图 4

(a) 发散光学纤维的焦点
(b) 发散光学纤维焦距的确定

$$d = \frac{x}{\operatorname{tg} \phi} = \frac{x_0 \operatorname{ch}(\sqrt{Az})}{n_0 \sqrt{A} x_0 \operatorname{sh}(\sqrt{Az})} = \frac{1}{n_0 \sqrt{A}} \operatorname{cth}(\sqrt{Az}) \quad (15)$$

同样还可求得焦点与主点的距离 f , 这就是焦距, 即为:

$$f = \frac{x_0}{\operatorname{tg} \phi} = \frac{1}{n_0 \sqrt{A} \operatorname{sh}(\sqrt{Az})} \quad (16)$$

由公式(15)和(16)可知, 焦点的位置不是一个定值, 而是随着纤维的长度和特性常数而变化的。

(上接第 73 页)

波, 而不是横波。实验数据见表 2。

以上四个方面的实验与分析, 可以证实, 声光 Q 开关中产生的复杂但有规律的衍射图案, 确是反射的纵、横波(声波)产生的。因而, 根据反射声波产生的声光衍射光斑的强弱, 可以检验所用吸声措施的实际效果。在图 1 位置 1 处测得, $\frac{I_2}{I_1}$ 在不加吸声措施时为 0.27, 涂以吸声橡胶后为 0.03。该比例越小, 说明吸声效果越好。

声光器件中的反射声波将使输出光信号产生畸变。对于调 Q 激光器中的声光 Q 开关来说, 反射声波将使声脉冲后沿拖长, 这是影响输出光脉冲峰功率与稳定性的一个因素。

本文得到魏墨鑫教授的指导以及上海激

光所吕建华、方正、陆世桢等同志的指导、帮助, 在此一并表示感谢。

如果把物距 L_0 和象距 L 都化成以主点为基准的表示式, 即 $L_0 \rightarrow L'_0, L \rightarrow L'$:

$$L'_0 = \frac{n_0 \sqrt{A} L_0 \operatorname{sh}(\sqrt{Az}) - 1 + \operatorname{ch}(\sqrt{Az})}{n_0 \sqrt{A} \operatorname{sh}(\sqrt{Az})}$$

$$L' = \frac{-[n_0 \sqrt{A} L_0 \operatorname{sh}(\sqrt{Az}) - 1 + \operatorname{ch}(\sqrt{Az})]}{\left\{ \begin{array}{l} n_0 \sqrt{A} \operatorname{sh}(\sqrt{Az}) [n_0 \sqrt{A} \\ \times L_0 \operatorname{sh}(\sqrt{Az}) + \operatorname{ch}(\sqrt{Az})] \end{array} \right\}}$$

这样发散纤维同样具有透镜系统中的物象关系式:

$$\frac{1}{L'} - \frac{1}{L'_0} = \frac{1}{f} \quad (17)$$

可以预计, 这种发散纤维和聚焦纤维相配合, 在激光和应用光学等领域中发挥不小的作用。

参 考 文 献

- [1] A. D. Pearson *et al.*; *Appl. Phys. Lett.*, 1969, 15, No. 2, 76.
- [2] T. Uchida *et al.*; *IEEE J. Quant. Electr.*, 1969, QE-5, No. 6, 331.
- [3] F. P. Kapron; *JOSA*, 1970, 60, No. 11, 1433.
- [4] 殷宗敏, 祝颂来, 陈尧生; 《物理》, 1980, 9, No. 6, 549.

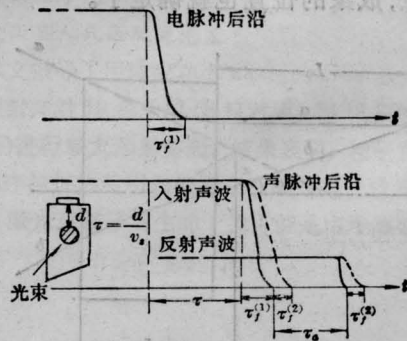


图 5 反射声波引起声脉冲后沿增加的示意图

参 考 文 献

- [1] H. Kolsky; *Stress waves in solids*, Oxford at the clarendon press 1953, pp 24~36.
- [2] 同济大学声学研究室; 《超声工业测量技术》, 上海人民出版社, 1977, p. 255.
- [3] 孙宗建; 《同济学报》, 1981, No. 2, 72~78.