激 光
第9卷 第12期

自由电子激光器的工作条件

雷仕湛 周忠益

（中国科学院上海光机所）

提要：分析了光辐射与相对论电子相互作用过程中，光辐射被相对论电子放大的条件。结果表明，只有在满足位相关系和频率关系的条件下，入射辐射才有可能获得较高的净增益。

Operating conditions for free-electron lasers

Lei Shezhan, Zhou Zhongyi

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: Conditions for amplifying the light radiation by relativistic electrons in the interaction between the light and electrons have been analyzed. It is shown that only when the phase relation and the frequency relation are satisfied, the incidient relation would have higher net gain.

引 言

自由电子激光器是一种把电子动能转变成相干辐射的装置。这一设想在1964年王之江同志和1971年Madey发表的论文中已提出来[1]。五年后，即到1976年，宣布自由电子激光器获得激光振荡[2]。因为自由电子激光器有希望成为高效率、高功率、频率可调谐的激光器，所以，这一课题的研究颇受各国的重视。

但是，在另一方面，光辐射与自由电子相互作用的时候，辐射能量也是可能转变为电子运动能量的，这就是光子加速器的工作原理。

所以，自然也就提出这样的问题：如何控制光辐射与自由电子相互作用过程中能量交换的方向，使希望建造自由电子激光器的研究者，获得激光增益，而使希望制造光子加速器的研究者获得电子加速增益。本文就是介绍我们的初步分析结果。

基 本 方 程

假定入射波是单色偏振平面波，频率为ω_r，它的偏振方向是沿z轴方向。电子在zy平面入射，入射方向与y轴交角为ψ。入射光波沿y方向传播，电子受到光波作用电场的分量E_{ry}和E_{rz}分别为：

$$E_{ry}=E_0e^{i(\omega_r t-ky+\phi)}\sin\psi$$
$$E_{rz}=-E_0e^{i(\omega_r t-ky+\phi)}\cos\psi \quad (1)$$

收稿日期：1982年3月9日。

式中 E_0 为振幅; ϕ 为初位相; k 为波矢

$$k=\frac{2\pi}{\lambda_r}。$$

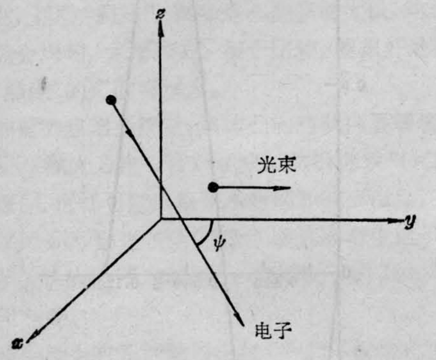

图 1

为了简单起见，我们考虑如图 2 的结构的磁场。周期磁场的方向沿 x 方向，沿 y 方向作周期变化。这样的磁场结构可以用下面的数学形式表示：

$$\boldsymbol{B}_m=\left(\frac{4B_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{2n+1}{\lambda_g}\pi y\right)\boldsymbol{e}_x \tag{2}$$

式中，B_0 是磁场强度；λ_g 是磁场的空间周期长度。

相对论电子在传播过程中，它受周期磁场和光波电磁场的共同作用，运动方程为：

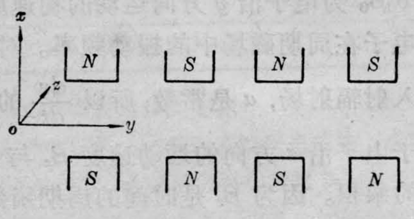

图 2

$$\frac{d}{dt}(r\boldsymbol{\beta})=\frac{e}{cm_0}[\boldsymbol{E}_r+c\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}] \tag{3}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_m+\boldsymbol{B}_r$$

$$\boldsymbol{B}_r=\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}}\,\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}_r \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{S}$ 是入射光波的玻印亭矢量；$\boldsymbol{\beta}=\frac{\boldsymbol{v}}{c}$，$r=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$，$c$ 是光速，$\boldsymbol{v}$ 是电子运动速度；e 是电子的电荷；m_0 是电子的质量；ε' 和 μ 为介质的介电常数和磁导率，在真空中取 $\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}}=1$。上面的公式中，我们略去了电子与电子之间的相互作用力，因为在电流密度较小时，它们之间的排斥力相对于光波电磁场和周期磁场所施加的作用力一般来说是小得多的。

在我们所规定的工作条件下，电子沿 x、y、z 的运动分量分别为：

$$\frac{d}{dt}(r\beta_x)=0 \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}(r\beta_y)=a\Big[\sin\psi+\Big(A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{2n+1}e^{-i[\omega_r(1-\beta_y\cos\psi)t+\phi]}+\cos\psi\Big)\beta_z\Big]e^{i[\omega_r(1-\beta_y\cos\psi)t+\phi]} \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}(r\beta_z)=a\Big[\cos\psi-\beta_y\Big(Ae^{-i[\omega_r(1-\beta_y\cos\psi)t+\phi]}\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{2n+1}+\cos\psi\Big)\Big]e^{i[\omega_r(1-\beta_y\cos\psi)t+\phi]} \tag{7}$$

其中

$$a=-\left(\frac{eE_0}{cm_0}\right)$$

$$A=\frac{4B_0}{\pi E_0} \tag{8}$$

$$S_n=\sin\frac{2n+1}{\lambda_g}\pi y$$

记电子的能量为 ε，由相对论可知：

$$\varepsilon=\sqrt{c^4m_0^2+c^2p^2} \tag{9}$$

由(9)式得：

$$\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}=c^2\frac{d}{dt}p^2=c^2\left[\frac{d}{dt}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)\right] \tag{10}$$

(9)式中的 p 是电子的动量，$\boldsymbol{P}=m_0cr\boldsymbol{\beta}$，又因为 $\varepsilon=m_0rc^2$，所以(10)式又可以进一步写成：

$$\frac{d}{dt}\varepsilon=\frac{1}{2m_0r}\frac{d}{dt}[p_x^2+p_y^2+p_z^2] \tag{11}$$

又因为动量三个分量随时间的变化有下面的关系：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}p_x^2&=2m_0c^2R_e\left[r\beta_x\frac{d}{dt}(r\beta_x)\right]\\\frac{d}{dt}p_y^2&=2m_0c^2R_e\left[r\beta_y\frac{d}{dt}(r\beta_y)\right]\\\frac{d}{dt}p_z^2&=2m_0c^2R_e\left[r\beta_z\frac{d}{dt}(r\beta_z)\right]\end{aligned}\right\}(12)$$

把(12)代入(10)式,整理后得:

$$\frac{d}{dt}\varepsilon=c^2m_0aR_e[(\beta_y\sin\psi+\beta_z\cos\psi)e^{i[\omega_r(1-\beta_y\cos\psi)t+\phi]}] \quad (13)$$

或

$$\frac{dr}{dt}=aR_e[(\beta_y\sin\psi+\beta_z\cos\psi)\times e^{i[\omega_r(1-\beta_y\cos\psi)t+\phi]}] \quad (14)$$

结果和讨论

我们利用 TQ-16 电子计算机解方程(6)~(9),便可以求得电子的运动轨迹。图3是当取 $A=1$, $\psi=0$, $\phi=\frac{\pi}{2}$ 时电子沿 y 方向的运动轨迹。由图3可见,电子沿 y 方向运动的速度变化是不大的。图4是电子沿 z 方向运动的轨迹,由图可见,电子沿 z 方向运动与沿 y 方向的运动不同,沿 z 方向的运动明显地出现周期性,由此我们可以推知,相对论电子在周期磁场中运动过程是会发射电磁波的。

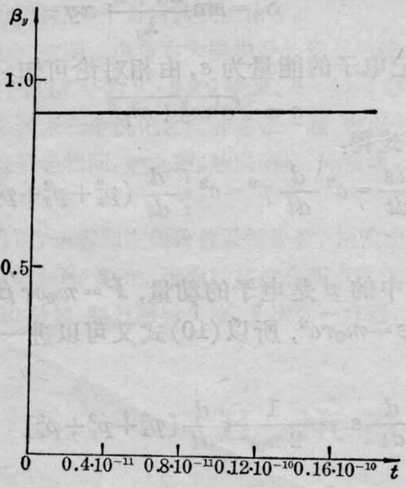

图3 $\psi=0$, $\phi=\frac{1}{2}\pi$, $\omega=5.2\times10^{11}$ 秒$^{-1}$时 $t\sim\beta_y$ 曲线

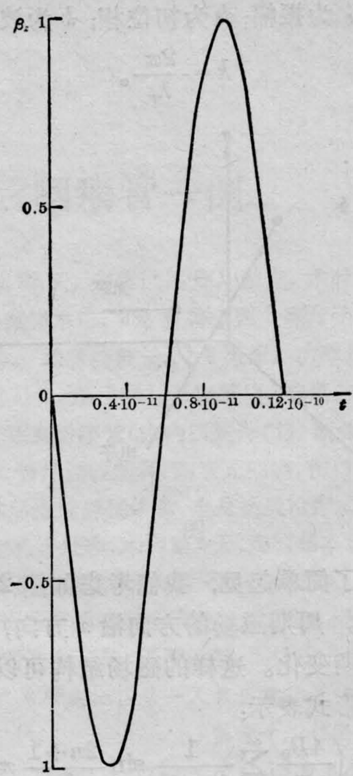

图4 $\psi=0$, $\phi=\frac{1}{2}\pi$, $\omega=1.6\times10^{13}$ 秒$^{-1}$时 $t\sim\beta_z$ 关系曲线

根据图3的结果,我们引入参数 ω_n:

$$\omega_n=\frac{(2n+1)\pi}{\lambda_g}c_0\beta_0 \quad (15)$$

其中 $c_0\beta_0$ 为电子沿 y 方向运动的初速度,ω_n 就是电子在周期磁场中的振动频率。对于给定的入射辐射场,a 是常数;所以 $\frac{d\varepsilon}{dt}$ 的变化取决于电子沿 z 方向的运动速度 β_z 与光场位相的乘积。因为 β_z 是时间的周期函数,所以,在一般情况来说,$\frac{d\varepsilon}{dt}$ 也是时间的周期函数。因此,这样的情况会出现的:按时间平均 $\overline{\frac{d\varepsilon}{dt}}=0$,即电子在半个周期的时间内受光场加速而增加能量,而在另外半个周期时间内则作减速运动,平均起来电子的能量不变,它既没有得到光场的加速,也没有向光场辐射能量,也就是说,既不能做成光子加速器,也不能做成自由电子激光器。但是,在一种

特殊的条件下，即当入射的光辐射的频率 ω_r 和电子在周期磁场中振动频率 ω_n 相当时

$$\omega_r(1-\beta_y)=\omega_n \quad (16)$$

$\frac{d\varepsilon}{dt}$ 的表达式中将出现与时间无关的量，对于属于频率 ω_n 的辐射，它就可以被自由电子作相干放大。图 5 和图 6 分别是几种不同入射光波频率 ω_r 得到的 $\frac{d\varepsilon}{dt}$ 值随时间变化的曲线，从图 5 我们可以看到，$\frac{d\varepsilon}{dt}$ 是对称的周期函数，显然，它的时间平均值 $\overline{\frac{d\varepsilon}{dt}}=0$；图 6 是 ω_r 接近满足条件(16)时的图解。从图

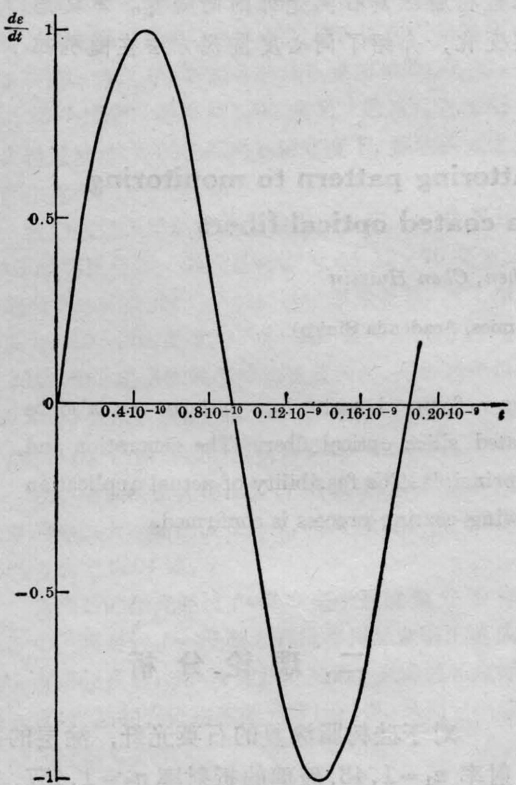

图 5 $\psi=0,\ \phi=\frac{1}{2}\pi,\ \omega=1.6\times10^{13}$ 秒$^{-1}$ 时的 $t\sim\frac{d\varepsilon}{dt}$ 曲线

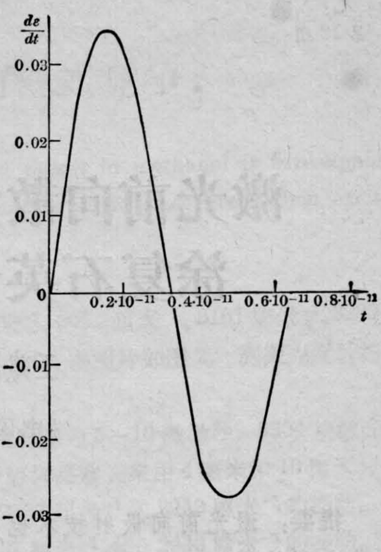

图 6 $\psi=0,\ \phi=\frac{1}{2}\pi,\ \omega=1.7\times10^{13}$ 秒$^{-1}$ 时的 $t\sim\overline{\frac{d\varepsilon}{dt}}$ 曲线

6 我们可以看到，此时 $\frac{d\varepsilon}{dt}$ 是时间不对称的函数，图中正半周的面积比负半周的面积约大 20%，因而 $\overline{\frac{d\varepsilon}{dt}}\neq0$。进一步的分析我们还可知道 $\overline{\frac{d\varepsilon}{dt}}$ 是大于零的常数还是小于零的常数，取决于入射光时的位相，在我们给定的位相条件下 $\overline{\frac{d\varepsilon}{dt}}>0$，入射光辐射将是加速电子运动的动力；如果改变入射光的位相反转 180°，则可使 $\overline{\frac{d\varepsilon}{dt}}<0$，即入射光波将被自由电子放大，就成自由电子激光器。

参 考 文 献

[1] 王之江;《自由电子振荡辐射》，长春光机所刊集，1964 年。J. M. J. Madey; *J. Appl. Phys.*, 1971, **42**, 1906.

[2] L. R. Elias *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1976, **36**, 717.