

象散一步彩虹全息术成象分析

陈桂丛 单启蛰

(山东海洋学院物理系)

提要: 本文对象散一步彩虹全息术各种可能的记录和重现光路进行系统的理论分析, 导出了得到正和赝准单色重现象的定量条件, 对于采用孔径共轭技术的彩虹全息术, 引入了确定光路参数的倒数三角形方法。

Imaging analysis of astigmatic one-step rainbow holography

Chen Guicong, Shan Qizhe

(Department of Physics, Shandong Ocean Institute)

Abstract: Various possible recording and reconstruction geometries of astigmatic one-step rainbow holography are analyzed. Quantitative conditions for obtaining orthoscopic and pseudoscopic quasi-monochromatic reconstructed images are derived. A method using the reciprocal triangle to determine the geometry of aperture conjugation technique in astigmatic rainbow holography is introduced.

一、引 言

在 H. Chen 和 F. T. S. Yu 提出的一步彩虹全息术^[1]及 E. N. Leith 和 H. Chen 提出的深象全息术^[2]的基础上, H. Chen 提出了象散一步彩虹全息术^[3,4]。除了用柱面透镜(其轴和狭缝平行)代替球面透镜外, 和一般的一步彩虹全息术中的正记录光路完全相同。由于使用了柱面透镜, 记录过程中的“物”是物经过柱面透镜所形成的象散的“象”, 其垂直维在记录底片附近, 而水平维则仍留在物的位置, 这里垂直和平行均相对狭缝而言。狭缝位于柱面透镜前焦点和物之间, 被成象在底片的后面。当应用这种技术记录的

全息图被重现时, 重现象也是象散的, 其垂直维在全息图附近, 其水平维离全息图有一定距离, 但观察者在狭缝重现象后面观察到的却好象是一个完整的三维正象, 其位置由水平维决定, 因此具有深象和纵向放大率线性的优点。由于垂直维是象平面附近全息, 水平维是准共轴全息, 色模糊应当是不严重的。

但是在这种单透镜记录光路中, 垂直维的视场由于渐晕而受到限制, 于是引入三透镜记录光路。在这种方案中, 狭缝位于柱面透镜 L_1 和其前焦点之间, 可以非常接近 L_1 , 因而垂直维有较大的视场而不受渐晕影响。第二个柱面透镜 L_2 类似于一般一步彩虹全

注: 作者现在在美国沙基诺大学访问。

收稿日期: 1982年2月15日。

息术中的场镜^[5],紧靠在记录底片的前面,它对物经 L_1 所成的“象”影响不大,但把狭缝经 L_1 所成的虚象进一步成一个实象在底片的后面。引入第三个柱面透镜 L_3 是为了纠正 L_2 产生的不希望有的参考波前弯曲。这种方案的缺点是需用较大的场镜,通常由液体组成,将引入较大的噪声。

最近, H. Chen 等人在象散一步彩虹全息术中,采用孔径共轭技术,利用赝记录光路而不是原来的正记录光路,获得正全息重现象^[6]。

本文对象散一步彩虹全息术的各种可能的记录和重现光路进行系统的理论分析,导出了获得正重现象和赝重现象的质量条件(关于一般的一步彩虹全息术的同样问题的讨论可参阅文献[7])。对采用孔径共轭技术的象散一步彩虹全息术,引入了确定光路参数的倒数三角形方法^[8]。

二、象散一步彩虹全息术象分析

考虑如图 1(a) 所示的象散一步彩虹全息术记录光路。假定物 O 是一个点光源,它的 X 、 Z 坐标为 h 、 l_H , 它的垂直维被柱面透镜所成的“象” I_V 的 Y 、 Z 坐标为 V 、 l_V 。狭缝经柱面透镜所成的象 I_S 的 Z 坐标为 L 。参考光波为中心在 R 的球面波经柱面透镜所成的象散光束, R 的 X 、 Z 坐标为 O 、 L_{1H} , 其垂直维的“象” R_V 的 Y 、 Z 坐标为 V_1 、 L_{1V} 。本文不考虑参考波为会聚的情形(这需用很大的透镜,在实际上是不方便的),因此 L_{1H} 和 L_{1V} 均大于 0, 至于 L_{1H} 和 L_{1V} 之间,则可以有 $L_{1H} > L_{1V}$, $L_{1H} = L_{1V}$ 和 $L_{1H} < L_{1V}$ 三种情形。

当记录的全息图被中心在点 $R'(O, V_2, L_2)$ 的球面波重现时,可以得到两组物和狭缝的重现象,如图 1(b) 所示,它们分别对应全息学基本方程中的第三项和第四项。记两个

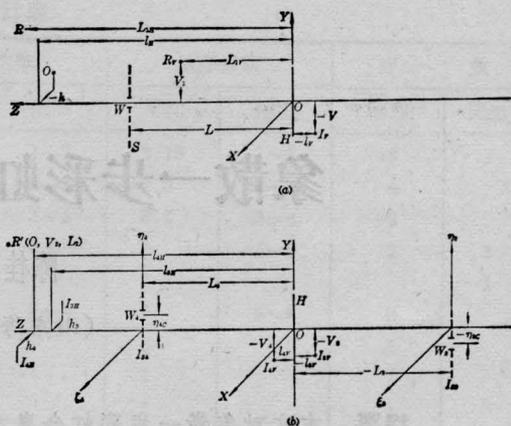


图 1 象散一步彩虹全息术光路

(a) 记录 (b) 重现

O —物; I_V —垂直维的“象”; I_S —狭缝的象; R —参考点光源; R_V —参考点光源垂直维“象”; H —记录底片; I_{3H} 、 I_{4H} —物水平维重现象; I_{3V} 、 I_{4V} —物垂直维重现象; I_{S3} 、 I_{S4} —狭缝重现象; R' —重现点光源

狭缝重现象中心的 Y 、 Z 坐标分别为 η_{30} 、 L_3 和 η_{40} 、 L_4 , 两个物重现象的水平维 X 、 Z 坐标分别为 h_3 、 l_{3H} 和 h_4 、 l_{4H} , 其垂直维的 Y 、 Z 坐标分别为 V_3 、 l_{3V} 和 V_4 、 l_{4V} , 可以证明^[9] 全息重现时我们感兴趣的两项分量波在其对应的狭缝重现象平面(分别附直角坐标系 (ξ_3, η_3) 和 (ξ_4, η_4))上的光场分布为:

$$\text{当 } |\eta_n - \eta_{nc}| < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left| \frac{L_n}{L} \right| \frac{W}{2} \quad (1)$$

时,

$$u_n(\xi_n, \eta_n; \lambda_2) = A_n \exp \left\{ \frac{j\pi}{\lambda_2} \left[\frac{(\xi_n - h_n)^2}{L_n - l_{nH}} + \frac{(\eta_n - v_n)^2}{L_n - l_{nV}} \right] \right\} \quad (2)$$

否则, $u_n = 0$ 。式中 n 取 3 或 4, A_n 为复常数, λ_1 和 λ_2 分别为记录和重现时光的波长, W 为狭缝经柱面透镜所成象的宽度,

$$L_n = \frac{L_{1V} L_2}{L_{1V} \mp \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(1 - \frac{L_{1V}}{L} \right) L_2}, \quad (3)$$

$$\eta_{nc} = L_n \left(\frac{V_2}{L_2} \mp \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{V_1}{L_{1V}} \right), \quad (4)$$

$$l_{nH} = \frac{L_{1H} L_2}{L_{1H} \mp \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(1 - \frac{L_{1H}}{L} \right) L_2}, \quad (5)$$

$$h_n = \pm l_{nH} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{h}{l_H}, \quad (6)$$

$$l_{nV} = \frac{L_{1V} L_2}{L_{1V} \mp \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(1 - \frac{L_{1V}}{l_V}\right) L_2}, \quad (7)$$

$$v_n = l_{nV} \left[\frac{V_2}{L_2} \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(\frac{v}{l_V} - \frac{V_1}{L_{1V}} \right) \right]. \quad (8)$$

式中上面的一组符号对应于 $n=3$, 下面的一组符号对应于 $n=4$. 从(1)式可见狭缝重现象的宽度为

$$W_n = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left| \frac{L_n}{L} \right| W_0. \quad (9)$$

必须强调指出, 由于选取的 Z 轴的方向和物光束、参考光束及重现光束照明底片的方向相反, 在透射全息中观察者总是在底片照明的另一侧, 所以如果 $L_n - l_{nH}$ 和 $L_n - l_{nV}$ 均小于零, 则狭缝重现象可以位于相应的物重现象和观察者之间, (2)式表示从物重现象向相应的狭缝重现象发散的象散光束, 这种情形满足彩虹全息术的基本要求, 观察者能够通过狭缝重现象观察到相应的物的准单色的重现象(当用白光重现时)。如果 $L_n - l_{nH}$ 和 $L_n - l_{nV}$ 均大于0, 则狭缝重现象离观察者比相应的物重现象更远, (2)式表示从狭缝重现象向相应的物重现象会聚的象散光束, 这种情形不满足彩虹全息的基本要求, 实际上无法观察准单色的物的重现象。如果 $L_n - l_{nH}$ 和 $L_n - l_{nV}$ 之一小于零, 另一大于零, 则狭缝重现象位于相应的物重现象的垂直维和水平维之间同样是无法观察的。

分别求(5)式对 l_H 和(7)式对 l_V 的偏微商, 得

$$\frac{\partial l_{nH}}{\partial l_H} = \frac{\pm \lambda_1 \lambda_2 L_{1H}^2 L_2^2}{(\lambda_1 l_H L_{1H} \mp \lambda_2 l_H L_2 \pm \lambda_2 L_{1H} L_2)^2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial l_{nV}}{\partial l_V} = \frac{\pm \lambda_1 \lambda_2 L_{1V}^2 L_2^2}{(\lambda_1 l_V L_{1V} \mp \lambda_2 l_V L_2 \pm \lambda_2 L_{1V} L_2)^2}. \quad (11)$$

上述等式表明, $\frac{\partial l_{3V}}{\partial l_V}$ 和 $\frac{\partial l_{3H}}{\partial l_H}$ 均大于零, 而

$\frac{\partial l_{4V}}{\partial l_V}$ 和 $\frac{\partial l_{4H}}{\partial l_H}$ 均小于零, 这说明对应于分量波 u_3 的物表面的重现象和物表面沿 Z 轴方向具有相同的凹凸性。对于光照另一侧的观察者来说, 如果 $L_3 - l_{3H}$ 和 $L_3 - l_{3V}$ 均小于零, 就可观察到物的正重现象。而对应于分量波 u_4 的物表面的重现象和物表面沿 Z 轴方向具有相反的凹凸性, 如果 $L_4 - l_{4H}$ 和 $L_4 - l_{4V}$ 均小于零, 就可观察到赝重现象。因此, 在这里可以把分量波 u_3 称为正分量波, 分量波 u_4 称为赝分量波。

由于象散一步彩虹全息术中重现象的垂直维在记录底片附近, 水平维如果在光照的另一侧, 则不能显示该技术能获得深全息重现象的优点, 所以我们可以近似地用 $L_n < 0$ 和 $l_{nH} > 0$ 代替 $L_n - l_{nV} < 0$ 和 $L_n - l_{nH} < 0$ 来求出彩虹全息重现象可以观察的条件。

狭缝重现象的位置 L_n 可以看作以 L 和 L_{1V} 为参变数的 L_2 的函数, 记为 $L_n(L_2; L, L_{1V})$, 从(3)式容易画出 L_n 的定性曲线, 如图2所示。图中的三组曲线可以定性表示参变数 L 和 L_{1V} 的各种可能选择下的 L_3 和

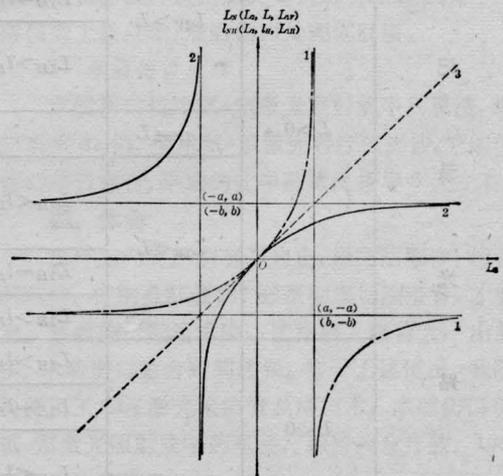


图2 函数 $L_n(L_2; L, L_{1V})$ 和 $l_{nH}(L_2; l_H, L_H)$ 的定性曲线

曲线1(2)表示 $L_{1V} < L$ 或 $L < 0$ 下的 $L_3(L_4)$ 或 $L_{1V} > L > 0$ 下的 $L_4(L_3)$, 同时表示 $L_{1H} < l_H$ 下的 $l_{3H}(l_{4H})$ 或 $L_{1H} > l_H$ 下的 $l_{4H}(l_{3H})$; 曲线3表示 $L_{1V} = L$ 下的 L_3 和 L_4 , 同时表示 $L_{1H} = l_H$ 下的 l_{3H} 和 l_{4H}

L_4 。四根平行于坐标轴的直线是第一组和第二组曲线的渐近线，渐近线交点坐标的绝对值为

$$a = \left| \frac{L_{1V}}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(1 - \frac{L_{1V}}{L}\right)} \right| \quad (12)$$

从(5)式，重现象水平维的位置 l_{nH} 可以看作以 l_H 和 L_{1H} 为参变数的 L_2 的函数，记为 $l_{nH}(L_2; l_H, L_{1H})$ 。它的函数形式和 $L_n(L_2; L, L_{1V})$ 完全相同，因而图2中的三组曲线同样可以定性表示参变数 l_H 和 L_{1H} 的各种可能选择下的 l_{3H} 和 l_{4H} ，只是渐近线交点坐标的绝对值为

$$b = \left| \frac{L_{1H}}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(1 - \frac{L_{1H}}{l_H}\right)} \right| \quad (13)$$

在某种记录光路（对应于参变数 L, l_H, L_{1V}, L_{1H} 的某种选择）下，从图2容易求出使 $L_3(L_4) < 0$ 和 $l_{3H}(l_{4H}) > 0$ 的 L_2 的区域，

也就是说，确定使正（赝）重现象可以观察的球面重现象中心位置的区域。本文不考虑会聚波重现，即 $L_2 < 0$ 的情形，因此仅需考虑图2中 $+L_2$ 半空间。举例说明，在 $L_{1V} < L$ 的情形下，函数 $L_3(L_2; L, L_{1V})$ 由第一组曲线表示，函数 $L_4(L_2; L, L_{1V})$ 由第二组曲线表示，可以看到，在 $+L_2$ 半空间，不存在 $L_4 < 0$ 的区域，因此无法观察到准单色的赝象。这时，如果 $L_{1H} > l_H$ ，函数 $l_{3H}(L_2; l_H, L_{1H})$ 由第二组曲线表示，只要 $L_2 > a$ ，就可使 $L_3 < 0$ 和 $l_{3H} > 0$ ，即可以观察到准单色的正象；如果 $L_{1H} = l_H$ ，函数 l_{3H} 由曲线3表示，同样地，只要 $L_2 > a$ ，就可观察到正象；如果 $L_{1H} < l_H$ ，函数 l_{3H} 由曲线1表示，能使 $L_3 < 0$ 和 $l_{3H} > 0$ 同时满足的是 $L_2 > a$ 和 $L_2 < b$ 的共同区域，这就是说，为了可以观察到正象，必须在记录时选择参数保证 $a < b$ 。

对象散一步彩虹全息术各种可能的记录

可观察的重现象				重现光路			
				$L_2 > a$	$L_2 < a$		
记 录 光 路	$L > 0$	$L_{1V} > L$	$L_{1H} < l_H$	$a < b$	赝	无	
			$L_{1H} = l_H$				
			$L_{1H} > l_H$				$L_2 < b$ 赝 $L_2 > b$ 无
		$L_{1V} = L$	$a > b$	无			
		$L < 0$	$L_{1V} < L$	$L_{1H} < l_H$	$a > b$		正
				$L_{1H} = l_H$	$a < b$		
	$L_{1H} > l_H$						
	$L_{1V} > L$		$L_{1H} > l_H$		$a < b$		无
			$L_{1H} = l_H$				
			$L_{1H} < l_H$	$L_2 < b$ 正 $L_2 > b$ 无			
				$a > b$	无		

- L —狭缝的象的 Z 坐标；
- L_{1H}, L_{1V} —参考点光源及其垂直维“象”的 Z 坐标；
- l_H —物点 Z 坐标；
- L_2 —重现象光源 Z 坐标；
- a —曲线 L_n 渐近线交点坐标的绝对值；
- b —曲线 l_n 渐近线交点坐标的绝对值。

和重现光路进行上述分析的结果,列在上表中。表中所列的所有结果在美国沙基诺大学的光学实验室中都已得到实验证实。

三、光路参数倒数三角形

上表给出的光路参数的选择范围仅保证当用白光重现时,透过狭缝重现象,可以观察到准单色的物重现象。为了得到一张好的象散一步彩虹全息图,光路参数的选择还受到一系列限制。其中某些限制是彩虹全息术共有的,例如应当有一个对观察者来说是合适的观察距离,即狭缝重现象的位置应当合适;重现点光源离底片的距离也应合理;在采用所谓的膜记录光路获得正全息重现象的技术^[6,10]中,往往需要移近参考点光源,或当参考光为象散时它的垂直维到底片的距离小于狭缝象到底片的距离。但是为了保证底片被均匀照明,这个距离又不能太近。下面两点限制则是象散彩虹全息术特有的,一是象散不应超过人类视觉可以适应的程度;二是垂直维和水平维的放大率应当匹配,即观察到的重现象水平和垂直的大小比例应当和物一致^[11]。

设物点的 Y 坐标为 v' ,物经柱面透镜成“象”的物距和象距为 P 和 Q , (8)式可以写成

$$v_n = l_{nV} \left(\frac{V_2}{L_2} \mp \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(\frac{Q}{P} \frac{v'}{l_V} + \frac{v_1}{L_{1V}} \right) \right). \quad (14)$$

分别求 (14) 式对 v' 和 (6) 式对 h 的偏微商,得

$$\frac{\partial v_n}{\partial v'} = \mp \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{Q}{P} \frac{l_{nV}}{l_V}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial h_n}{\partial h} = \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{l_{nH}}{l_H}. \quad (16)$$

显然, $\frac{\partial h_3}{\partial h} > 0$, $\frac{\partial h_4}{\partial h} < 0$, 而 $\frac{\partial v_n}{\partial v'}$ 不管 n 取 3 或 4 均小于 0, 所以,垂直维和水平维放大率匹配要求下式

$$-\frac{\partial v_n}{\partial v'} / l_{nV} - l_n = \left| \frac{\partial h_n}{\partial h} \right| / l_{nH} - L_n \quad (17)$$

成立。将 (3)、(5)、(7)、(15) 和 (16) 式代入 (17) 式,经整理后得

$$\frac{1}{L_{1V}} - \frac{1}{L_{1H}} = \left(1 \mp \frac{P}{Q} \frac{l_V}{l_H} \right) \frac{1}{L} - \left(1 \mp \frac{P}{Q} \right) \frac{1}{l_H}, \quad (18)$$

当观察正象时,用上面一组符号,当观察负象时,用下面一组符号。对于采用孔径共轭技术的象散彩虹全息术来说, $l_V \approx 0$, $Q \approx L$, $l_H \approx P + Q$, 取上面一组符号, (18) 式可以化为

$$\frac{1}{L_{1V}} - \frac{1}{L_{1H}} \approx 2 \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{l_H} \right). \quad (19)$$

这和无物透镜象散彩虹全息术^[8]中的放大率匹配公式相同。

如果进一步要求轴向和横向放大率匹配^[12], 则应当有

$$\frac{\partial l_{nH}}{\partial l_H} = \frac{\partial h_n}{\partial h}. \quad (20)$$

将 (10)、(16) 两式代入 (20) 式,经整理后得

$$l_{nH} = l_H, \quad (21)$$

上式可以写成

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \mp 1 \right) \frac{1}{l_H} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{1}{L_2} \mp \frac{1}{L_{1H}}, \quad (22)$$

对于正象(用上面一组符号),当 $\lambda_2 = \lambda_1$ 时,轴向和横向放大率相等的条件就是 $L_2 = L_{1H}$, 这个结果是明显的。

下面我们引入对于采用孔径共轭技术的象散彩虹全息术,确定光路参数的倒数三角形方法。由于观察的是正象,遇到有两组符号的式子时,用上面一组符号。结合 (3)、(5) 和 (19) 式,可得

$$\frac{1}{2} \frac{1}{L_{1V}} = \frac{1}{2} \frac{1}{L_{1H}} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{1}{L_3} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{1}{l_{3H}}. \quad (23)$$

(23)、(19)、(21) 和 (22) 式可以写成

$$\frac{1}{2} D_{1V} = \frac{1}{2} D_{1H} + D_3 + d_{3H}, \quad (24)$$

$$\frac{1}{2} D_{1V} = D + \frac{1}{2} D_{1H} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} d_{3H}, \quad (25)$$

$$d_H = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} d_{3H}, \quad (26)$$

$$D_2 - D_{1H} = d_{3H} - d_H, \quad (27)$$

式中 $D = \frac{1}{L}$, $D_{1V} = \frac{1}{L_{1V}}$, $D_{1H} = \frac{1}{L_{1H}}$, $D_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{1}{L_2}$, $D_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{1}{L_3}$, $d_H = \frac{1}{l_H}$, $d_{3H} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{1}{l_{3H}}$ 。由于在所讨论的这种彩虹全息技术中, L_{1V} 受到的限制较为严格, 我们可以首先选定 L_{1V} , 即 D_{1V} 的数值。根据平面几何学的定理: 平面上一点到一等边三角形三边距离的代数和等于该三角形的高, 如果以 $\frac{1}{2} D_{1V}$ 为高作一等边三角形, 由(24)式可知, 三角形内一点到三边(分别记为 L_{1H} 、 L_3 、 l_{3H} 边)的距离可以分别表示 $\frac{1}{2} D_{1H}$ 、 D_3 、 d_{3H} , 如果把 L_3 边当作 L 边, 由(25)式, 该三角形 l_{3H} 边外侧一点到三边的距离可以分别表示 D 、 $\frac{1}{2} D_{1H}$ 、 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} d_{3H}$ (d_H), 如图3所示。确定光路参数的问题, 化为如何在该三角形内选定一个工作点 Q 的问题。考虑到观察距离应当适中, 可以估计 D_3 的极大值和极小值; 考虑到参考点光源不能离底片太近, 可以估计 D_{1H} 的极大值, 由于可用平行光, D_{1H} 的极小值是 0; 从物和底片的尺寸和实验室可以得到的柱面透镜的焦距, 结合考虑人的视觉对象散的适应能力, 便可以估计 d_{3H} 的取值范围。于是可以在三角形内得到一个由 $D_3 = D_3^{\max}$, $D_3 = D_3^{\min}$; $d_{3H} = d_{3H}^{\max}$, $d_{3H} = d_{3H}^{\min}$ 和 $\frac{1}{2} D_{1H} = \frac{1}{2} D_{1H}^{\max}$, L_{1H} 边围成的工作区, 工作点 Q 就在这个工作区内选取。

Q 点选定以后, 过 Q 点作 L_{1H} 边的平行

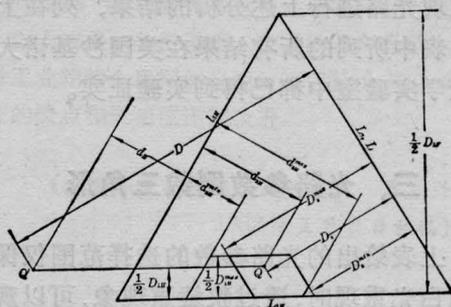


图3 光路参数倒数三角形

线, 在三角形 l_{3H} 边外侧作 l_{3H} 边的平行线, 相距 d_H , 两平行线交点 Q' 到 L 边的距离即为 D , 由 D 值是否合理可以检验 Q 点是否选得合适。最后求出柱面透镜的焦距。

本文得到美国沙基诺大学教授 H. Chen 的指导和上海科技大学陈明仪同志的许多帮助, 在此致谢。

参 考 文 献

- [1] H. Chen, F. T. S. Yu; *Opt. Lett.*, 1978, **2**, 85.
- [2] E. N. Leith, H. Chen; *Opt. Lett.*, 1978, **2**, 82.
- [3] H. Chen; *Appl. Opt.*, 1979, **18**, 3728.
- [4] H. Chen et al.; "Recent Advances in Holography", T. C. Lee and P. N. Tamura, Eds., *Proc. Soc. Instrum. Eng.*, 1980, **215**, 162.
- [5] P. N. Tamura; *Appl. Opt.*, 1978, **17**, 3343.
- [6] H. Chen et al.; *Appl. Opt.*, 1981, **20**, 3557.
- [7] 陈桂丛, H. Chen; "一步彩虹全息术成象分析" (待发表)。
- [8] H. Chen et al.; (to be published.)
- [9] H. Chen et al.; "Diffraction theory of Astigmatic Rainbow Holography", Manuscripts in Preparation.
- [10] S. A. Benton et al.; *SPIE*, 1980, **215**, 156.
- [11] H. Chen; Malgorzata Kujawincka, to be published in *Opt. Commun.*
- [12] 单启蛰等; "全息术的几何光学模式及其在象散彩虹全息中的应用", (待发表)。