激 光
第 9 卷 第 10 期

周期磁场中的相对论电子与光辐射的能量交换

雷仕湛 江 惠

（中国科学院上海光机所）

提要：基于相对论电子在周期磁场和光辐射场作用下的运动方程，讨论了相对论电子与光辐射之间的有效的能量交换。结果表明，相对论电子与光辐射只有在满足共振条件的频率上发生能量交换。光辐射是被相对论电子放大还是成为加速电子运动的动力，取决于两者的位相关系。

On the energy exchange between relativistic electrons in periodic magnetic field and light radiation

Lei Shizhan, Jiang Hui

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: The energy exchange between relativistic electrons (r.e.) and light radiation are discussed on the basis of the movement equations for the interaction of relativistic electrons with periodic field and the radiation field. It is shown that effective energy exchange can take place only at the frequeney satisfying the resonance condition. Depending on their phase of light relation, radiation can be amplified by the relativistic electrons or becomes the force accelerating the electrons.

一、引 言

相对论电子束通过周期磁场时发生受激辐射放大，Motz 等人在 1972 年曾作过分析[1]。到 1976 年，Madey 和他的同事宣布在斯坦福大学建成自由电子激光器[2]。因为这种激光器据认为有可能获得高效率、高功率相干辐射，而且辐射频率能够连续调谐，因而这种新型激光器颇受人们重视。

相对论电子与光辐射相互作用，结果有两种：其一是光辐射将相对论电子进一步加速，亦即做成“光子加速器”。其二是光辐射被相对论电子放大，象在激光器里面发生的过程相似。那末，在什么条件下，相互作用的结果是加速电子运动，在什么条件下是被相对论电子作辐射放大？这就是本文讨论的内容。

二、基本方程和结果

假定如图 1 所示的周期磁场结构。磁场取 x 方向沿 y 方向作周期变化。这样的磁场

收稿日期：1981 年 11 月 20 日。

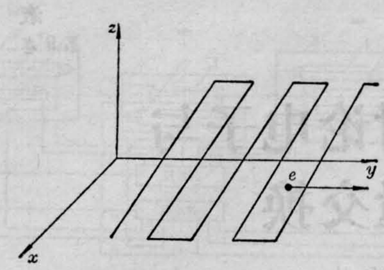

图 1

结构可以用下面的数学形式表示：

$$\boldsymbol{B}_m=\frac{4B_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\times\sin\left(\frac{2n+1}{\lambda_g}\pi y\right)\boldsymbol{e}_x \qquad (1)$$

其中 B_0 是磁场强度，λ_g 是磁场的周期长度，$\boldsymbol{e}_x$ 为 x 方向的单位矢。

假定入射光波是单色平面波，频率为 ω_r，沿 z 方向偏振，沿 y 方向传播。即入射光波取下面的形式：

$$\boldsymbol{E}_r=E_0e^{i(\omega_r t-ky+\phi)}\boldsymbol{e}_z \qquad (2)$$

其中 E_0 为光电场的振幅；ϕ 是初位相；k 是 y 方向的波矢：

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\omega_r/c \qquad (3)$$

为了简单起见，我们假定入射光波的传播方向与相对论电子束的传播方向相反，如图 2 所示。相对论电子在周期磁场和光波电场、磁场的作用下，运动规律由下面的方程描述：

$$m_0\frac{d}{dt}(r\boldsymbol{\beta})=\frac{e}{c}(\boldsymbol{E}_r+c\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{B}) \qquad (4)$$

式中的 m_0、e 分别为电子的静止质量和它的电荷；c 为光速；$\boldsymbol{\beta}=\frac{v}{c}$，这里 v 为电子速度；r 是相对论因子，$r=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$；磁场 $\boldsymbol{B}$ 包括两部分：周期静磁场 $\boldsymbol{B}_m$ 和入射光的磁场 $\boldsymbol{B}_r$，即

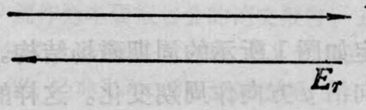

图 2

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_m+\boldsymbol{B}_r \qquad (5)$$

光场形成的磁场与电场 $\boldsymbol{E}_r$ 有联系：

$$\boldsymbol{B}_r=\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}}\,\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E}_r \qquad (6)$$

其中 ε' 是介质的电介常数；μ 是磁导率，在这里我们取 $\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}}=1$；$\boldsymbol{s}$ 是玻印亭矢量。

记电子的能量为 $\mathscr{E}$，则

$$\begin{aligned}\mathscr{E}^2&=c^4m_0^2+c^2P^2\\ \mathscr{E}\frac{d\mathscr{E}}{dt}&=c^2\frac{d}{dt}P^2\end{aligned} \qquad (7)$$

上面式中的 P 是电子的动量，$\boldsymbol{P}=m_0cr\boldsymbol{\beta}$。在我们这里讨论的情况，电子的动量变化是由于受入射光场和周期磁场作用的结果。又因为

$$\mathscr{E}=m_0rc^2$$

所以，(7)式进一步可以写成：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathscr{E}&=\frac{1}{2m_0r}\frac{d}{dt}P^2\\ &=\frac{1}{2m_0r}\frac{d}{dt}(P_x^2+P_y^2+P_z^2)\end{aligned} \qquad (8)$$

又因为

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}P_x^2&=2m_0^2c^2r\beta_x\frac{d}{dt}r\beta_x\\ \frac{d}{dt}P_y^2&=2m_0^2c^2r\beta_y\frac{d}{dt}r\beta_y\\ \frac{d}{dt}P_z^2&=2m_0^2c^2r\beta_z\frac{d}{dt}r\beta_z\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

由方程 (4) 我们可以分别求出电子沿 x、y、z 方向运动的速度方程：

$$\frac{d}{dt}r\beta_x=0 \qquad (10)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(r\beta_y)=&-\Big(1+A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n}{2n+1}\\ &\times e^{-i[\omega_r(1-\beta_y)t+\phi]}\Big)\beta_z c\\ &\times ae^{i[\omega_r(1-\beta_y)t+\phi]}\end{aligned} \qquad (11)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(r\beta_z)=&-ae^{i[\omega_r(1-\beta_y)t+\phi]}\\ &\times\Big[1-\Big(A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n}{2n+1}\\ &\times e^{-i[\omega_r(1-\beta_y)t+\phi]}+1\Big)\beta_y c\Big]\end{aligned} \qquad (12)$$

式中 $a=-\left|\dfrac{eE_0}{cm_0}\right|$

$$A=\frac{4B_0}{\pi E_0}$$

$$S_n=\frac{1}{2i}\left[e^{i\frac{2n+1}{\lambda_g}\pi y}-e^{-i\frac{2n+1}{\lambda_g}\pi y}\right]$$

把方程(10)、(11)和(12)代入(9)，整理后得：

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt}=-c^2m_0a\beta_z e^{i[\omega_r(1-\beta_y)t+\phi]} \tag{13}$$

或者，利用 $\varepsilon=m_0rc^2$，式(13)还可以写成：

$$\frac{d}{dt}r=-a\beta_z e^{i[\omega_r(1-\beta_y)t+\phi]} \tag{14}$$

方程(9)、(10)、(11)、(12)和(14)就是相对论电子在周期磁场中与光辐射相互作用的运动规律。

三、讨　论

从方程(13)我们看到，因为 m_0、c、a 都是大于零的常数，所以，电子能量变化的方向也就取决于电子沿 z 方向振动运动的速度与电场 $\boldsymbol{E}_r$ 的位相关系。如果 β_z 的位相与 $\boldsymbol{E}_r$ 的位相相反，那么，$\dfrac{d\mathscr{E}}{dt}>0$。在这种情况下，表示入射的光辐射把相对论电子进一步加速。如果 β_z 的位相与 $\boldsymbol{E}_r$ 的位相相同，那么 $\dfrac{d\mathscr{E}}{dt}<0$，这表示入射光辐射受相对论电子放大。但是，因为电子沿 z 方向振动运动速度的频率与 $\boldsymbol{E}_r$ 的不相同，因而，两者之间的位相关系不可能保持恒定。这就可能出现这种情况：在电子振动运动的半个周期内，入射的光辐射被放大，而在下半个周期，它的位相与光辐射场的位相相反，电子被入射光波加速。所以，按时间平均相对论电子既没有损失能量，也没有得到能量。也就是说，我们没有做成自由电子激光器，也没有做成光子加速器。

把(14)代入(11)式，得：

$$\frac{d}{dt}\,r\beta_y=+\left(1+A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n}{2n+1}\times e^{-i[\omega_r(1-\beta_y)t+\phi]}\right)\frac{dr}{dt} \tag{15}$$

利用 $t=0$ 时，$r=r_0$，$\beta_y=\beta_0$，解方程(15)得：

$$r\beta_y=\left(1+A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n}{2n+1}\times e^{-i[\omega_r(1-\beta_y)t+\phi]}\right)r+r_0\beta_0-r_0 \tag{16}$$

把(14)、(16)代入(12)，以及利用初始条件 $t=0$，$\beta_z=0$，解方程(12)后得：

$$\frac{1}{2}(r\beta_z)^2=\frac{r^2}{2}-(r_0\beta_0-r_0)\times\left(1+A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n}{2n+1}\times e^{-i[\omega_r(1-\beta_y)t+\phi]}\right)r-\left(1+A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n}{2n+1}\times e^{-i[\omega_r(1-\beta_y)t+\phi]}\right)^2\frac{r^2}{2}+r_0(r_0\beta_0-r_0) \tag{17}$$

对于能量很高的相对论电子束，$1-\beta_0\approx 0$，所以(17)式近似地写为：

$$\frac{1}{2}(r\beta_z)^2\approx-2A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n}{2n+1}\times e^{-i[\omega_r(1-\beta_y)t+\phi]}\frac{r^2}{2}-\left(A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n}{2n+1}\times e^{-i[\omega_r(1-\beta_y)t+\phi]}\right)^2\frac{r^2}{2} \tag{18}$$

假定 $A\gg 1$，即在强的静态磁场条件下，(18)式简化为：

$$\frac{1}{2}(r\beta_z)^2=-\left(Ar\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n}{2n+1}\times e^{-i[\omega_r(1-\beta_y)t+\phi]}\right)^2\frac{1}{2}$$

所以

$$r\beta_z=iAr\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n}{2n+1}\times e^{-i[\omega_r(1-\beta_y)t+\phi]}=\frac{Ar}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\times\left[e^{-i[\omega_r(1-\beta_y)t-\omega_nt+\phi]}-e^{-i[\omega_r(1-\beta_y)t+\omega_nt+\phi]}\right] \tag{19}$$

式中 ω_n 为：

$$\omega_n=\frac{2n+1}{\lambda_g}\pi\beta_y c \tag{20}$$

把(19)式代入(14)式，便可以得到电子运动能量变化的方程：

$$\frac{dr}{dt}=\frac{-aA}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\times\big[e^{-i[\omega_r(1-\beta_y)t-\omega_n t+\phi]}-e^{-i[\omega_r(1-\beta_y)t+\omega_n t+\phi]}\big]\Big) \tag{21}$$

由(21)式我们看到，电子能量按时间平均值将等于零，除非频率ω_r和ω_n满足如下的关系：

$$\omega_r(1-\beta_y)=\omega_n \tag{22}$$

这也就是说，对于满足条件(22)的辐射频率，它才会使电子的能量产生纯增益，或者使电子能量减少。或者说，只有满足方程(22)的频率，才可以用来做光子加速器的动力，或者作自由电子激光器的振荡频率。至于是使相对论电子能量增加，还是减少，这决定于光波与相对论电子振动运动之间的位相关系。关于这一点，我们将另文详细讨论。

当$A=0$时，即在没有静态磁场时，由(17)式得：

$$\frac{1}{2}(r\beta_z)^2=r_0(1-\beta_0)(r-r_0)$$

$$r\beta_z=\sqrt{2r_0(1-\beta_0)(r-r_0)} \tag{23}$$

把(23)式代入(14)式，我们可以得到在这种条件下电子能量的变化规律：

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{a}{r}\sqrt{2r_0(1-\beta_0)(r-r_0)}\times e^{i[\omega_r(1-\beta_y)t+\phi]} \tag{24}$$

由(24)式可看到，电子的能量按时间的平均值将等于零。这说明，要建立光子加速器或自由电子激光器，引入静态周期磁场是必要条件之一。

参 考 文 献

[1] H. Motz; *J. Appl. Phys.*, 1951, **22**, 527.

[2] L. R. Elia *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1976, **36**, 717.

(上接第656页)

4. 跟踪温度特性

跟踪温度特性是指跟踪特性的斜率随温度的关系。由于接收器灵敏度随温度变化等原因，跟踪特性的斜率也要随温度变化，这个变化会影响光纤耦合激光器的光功率随温度变化的自动控制精度。使用的接收器不同，跟踪的温度特性也不同。当温度变化10℃，则PIN硅光电二极管和硅太阳电池的跟踪特性的斜率大约变化±3%，2CU光敏二极管大约变化±10%，而3DU光敏管大约变化±11%。当然，要做到这个斜率不随温度变化是不大可能的，但是如果采用单模激光器和灵敏度温度系数小的接收器，进一步改进制备工艺和器件结构，相信跟踪温度特性会得到改善。图7画出了428#器件从12～40℃时的跟踪特性。

本工作得到杨姮彩先生，金志良、张银女、单振国等全室同志大力支持；本器件中PIN硅光电二极管由邮电部519厂提供；四机部1934所高孝刚同志，734厂杨俊明、邱培曦同志提供使用初步结果，对此表示感谢。

参 考 文 献

[1] P. W. Shunate; *BSTJ*, 1978, **57**, 1823.

[2] M. A. Karr *et al.*; *Appl. Opt.*, 1978, **17**, 2215.

[3] 金志良，陈新之，《半导体光电》，1981，No2，130.

[4] 谢黄海；《激光》，1982，**9**，No. 1,20.