激 光
第9卷 第1期

平面型有界等离子体的不稳定性

王 润 文

（中国科学院上海光机所）

提要：激光与平面型等离子体相互作用，会出现各类非线性过程。本文从等离子体中两个波耦合方程出发，研究了均匀等离子体的不稳定性。当存在阻尼时，就有可能出现不稳定性。而当阻尼很小可被忽略后，将仅出现空间增益效应。对于密度按线性变化的非均匀等离子体，本文得到它的解析解，并讨论了出现不稳定性的条件。

Instabilities of bounded plane plasmas

Wang Runwen

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: There are several kinds of nonlinear processes in the interaction between laser light and plane plasmas. Starting from two-wave coupling equations of plasmas, we discuss the instabilities appeared in homogeneous plasmas. If there is damp, the instabilities may appear, and when the damp is so small that can be neglected, there exists only spatial gain. The analytic solution of inhomogeneous plasma with density varying almost linearly are obtained and the conditions for occuring instabilities are discussed.

一、有限均匀等离子体的不稳定性

强激光注入等离子体中会出现参量衰变不稳定，若把空间不均匀分布因素考虑在内，可以获得如下两个耦合方程[1, 2]：

$$\frac{\partial a_1}{\partial t}+V_1\frac{\partial a_1}{\partial x}+\Gamma_1 a_1=\gamma_0 a_2^* \exp\left\{i\int_0^x k(x)\,dx\right\} \tag{1}$$

$$\frac{\partial a_2^*}{\partial t}+V_2\frac{\partial a_2^*}{\partial x}+\Gamma_2 a_2^*=\gamma_0 a_1 \exp\left\{-i\int_0^x k(x)\,dx\right\} \tag{2}$$

这里 a_1 及 a_2 代表两个衰变波场，一个是向前传播的激光场，一个是后向散射或反射的波场；Γ_1 及 Γ_2 为线性阻尼；V_1 及 V_2 为两个波的群速度；γ_0 为两个波的耦合常数；$k(x)=\sum_i \Delta k_i(x)$ 为波数，它对于非均匀等离子体是等离子体厚度的函数。方程(1)及(2)右边的指数函数就是代表空间不均匀因子。今设两个波的解为：

$$\begin{aligned} a_1&=\alpha_1(x)e^{-i\Omega t}\\ a_2^*&=\alpha_2^*(x)e^{-i\Omega t} \end{aligned} \tag{3}$$

略去线性阻尼，并将(3)式代入(1)、(2)中便有：

收稿日期：1981年4月1日。

$$\left(-i\Omega+V_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\alpha_1(x)-\gamma_0\alpha_2^*(x)e^{i\int_0^x k(x)dx}=0 \tag{4}$$

$$\left(-i\Omega+V_2\frac{\partial}{\partial x}\right)\alpha_2^*(x)-\gamma_0\alpha_1(x)e^{-i\int_0^x k(x)dx}=0 \tag{5}$$

用算子$\left(-i\Omega+V_2\frac{\partial}{\partial x}\right)$作用到(4)式，并应用(5)式便导得如下方程：

$$\left(-i\Omega+V_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\Omega+V_2\frac{\partial}{\partial x}\right)\alpha_1(x)$$
$$-\gamma_0^2\alpha_1(x)-\gamma_0\alpha_2^*(x)\left(iv_2k(x)\right)e^{i\int_0^x k(x)dx}=0 \tag{6}$$

由(5)式解得：

$$\alpha_2^*(x)=e^{i\frac{\Omega}{V_2}x}\int e^{-i\frac{\Omega}{V_2}x}\frac{\gamma_0}{V_2}\times\alpha_1(x)e^{-i\int_0^x k(x)dx}dx \tag{7}$$

将(7)代入(6)可得只有$\alpha_1(x)$变量的微分方程：

$$\left(-i\Omega+V_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\Omega+V_2\frac{\partial}{\partial x}\right)\alpha_1(x)$$
$$-\gamma_0^2\alpha_1(x)-i\gamma_0^2k(x)e^{i\frac{\Omega}{V_2}x}\cdot e^{i\int_0^x k(x)dx}$$
$$\times\int e^{-i\frac{\Omega}{V_2}x}\alpha_1(x)e^{-i\int_0^x k(x)dx}dx=0 \tag{8}$$

这就是在非均匀等离子体中波的基本方程式。现在我们先讨论均匀等离子体的情况，略去含$k(x)$这一项便得到讨论均匀等离子体中波所满足的微分方程式，展开算子整理后有：

$$\left[V_1V_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-i\Omega(V_1+V_2)\frac{\partial}{\partial x}-(\Omega^2+\gamma_0^2)\right]\alpha_1=0 \tag{9}$$

作变量变换，令

$$\alpha_1(x)=v(x)e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} \tag{10}$$

(9)式变成

$$v''(x)+\beta^2v=0 \tag{11}$$

其中：
$$p(x)=-\frac{i\Omega(V_1+V_2)}{V_1V_2}$$

$$\beta^2=-\frac{\Omega^2+\gamma_0^2}{V_1V_2}+\frac{\Omega^2}{4}\left(\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)^2 \tag{12}$$

可令(11)式的通解为：

$$v(x)=Ae^{i\beta x}+Be^{-i\beta x} \tag{13}$$

设这平面型有界等离子体的边界条件为：

$$v(o)=v(l)=v_0 \tag{14}$$

由此求得两个积分常数为

$$A=\frac{v_0(1-e^{-i\beta l})}{2i\sin\beta l}\qquad B=\frac{v_0(e^{i\beta l}-1)}{2i\sin\beta l} \tag{15}$$

故$v(x)$之通解为：

$$v(x)=\frac{-iv_0}{2\sin\beta l}\left[(1-e^{-i\beta l})e^{i\beta x}+(e^{i\beta l}-1)e^{-i\beta x}\right]$$
$$=\frac{v_0}{2\cos\left(\beta\cdot\frac{l}{2}\right)}\cos\beta\left(x-\frac{l}{2}\right) \tag{16}$$

显然当β为纯虚数时$v(x)$就由双曲线函数表示：

$$v(x)=\frac{v_0}{2\mathrm{ch}\left|\frac{\beta l}{2}\right|}\mathrm{ch}\left|\beta\left(x-\frac{l}{2}\right)\right| \tag{17}$$

可见，当$x=\frac{l}{2}$，$\mathrm{ch}\,\beta\left(x-\frac{l}{2}\right)\equiv1$。因此波从$\frac{l}{2}$面发射都存在空间增益，而在边界处达到最大。由(12)式可知$\beta^2<0$时条件为：

$$\frac{\Omega^2}{4}\left(\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)^2<\frac{\Omega^2+\gamma_0^2}{V_1V_2} \tag{18}$$

因此临界条件为

$$\Omega=2(V_1V_2)^{\frac{1}{2}}\gamma_0/(V_1-V_2) \tag{19}$$

二、存在阻尼的情况

这时取代(4)、(5)式应该是

$$-i\Omega\alpha_1(x)+V_1\frac{\partial\alpha_1(x)}{\partial x}+\Gamma_1\alpha_1(x)=\gamma_0\alpha_2^*(x)e^{i\int_0^x k(x)dx} \tag{20}$$

$$-i\Omega\alpha_2^*(x)+V_2\frac{\partial\alpha_2(x)}{\partial x}+\Gamma_2\alpha_2^*(x)=\gamma_0\alpha_1(x)e^{-i\int_0^x k(x)dx} \tag{21}$$

与第一节相仿的过程，用算子$\left(-i\Omega+V_2\frac{\partial}{\partial x}+\Gamma_2\right)$作用(20)式，然后略去非均匀项，整理后可得如下方程：

$$\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}+\frac{(\Gamma_2-i\Omega)V_1+(\Gamma_1-i\Omega)V_2}{V_1V_2}\frac{\partial\alpha}{\partial x}$$

$$+\frac{(\Gamma_1-i\Omega)(\Gamma_2-i\Omega)-\gamma_0^2}{V_1V_2}\alpha_1=0 \quad (22)$$

作变量变换:

$$v(x)=\alpha_1(x)e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Gamma_2-i\Omega)V_1+(\Gamma_1-i\Omega)V_2}{V_1V_2}x} \quad (23)$$

则(22)式变为

$$v''(x)+\beta^2 v=0 \quad (24)$$

$$\beta^2=\frac{-[(\Gamma_2-i\Omega)V_1-(\Gamma_1-i\Omega)V_2]^2}{4V_1^2V_2^2}$$

$$-\frac{\gamma_0^2}{V_1V_2} \quad (25)$$

(24)式解的形状与(13)、(16)完成相似，只是其中β由方程(25)来描述，由于现在β将是复数，空间增益将永远存在，显然不论β^2大于、小于抑或等于零都将如此，若令

$$\beta^2\geqq 0 \quad (26)$$

便导得相应条件是:

$$\Omega\geqq\frac{2\gamma_0(V_1V_2)^{\frac{1}{2}}}{V_1-V_2}-i(\Gamma_2V_1-\Gamma_1V_2) \quad (27)$$

从(27)式当$\Gamma_1=\Gamma_2=0$，取等号便过渡到第一节无阻尼情况下的临界条件。由于阻尼存在，若

$$\Gamma_1V_2-\Gamma_2V_1>0 \quad (28)$$

(28)式就是不稳定增率的表示式，因而有阻尼的有界平面型等离子体将出现时间增率。从(23)式可以看出，由于Γ_2与Γ_1的存在，且当$V_1, V_2>0$时这因子对空间增益系数贡献为负的，体现为吸收效应，波在空间传输受到阻碍，而其能量转化为当地时间增率，出现不稳定性。相反，当$V_1, V_2<0$时，空间增益系数为正，空间放大效应出现却抑制了不稳定性。

三、非均匀等离子体耦合方程的解析解

为简化讨论，略去阻尼因子Γ_1及Γ_2，从(8)式的一般非均匀等离子体中波所满足的积微分方程式开始。首先我们可以认为$\alpha_1(x)$是空间慢变化函数而提出积分号外。并令

$$e^{i\left[\frac{\Omega}{V_2}x+\int_0^x k(x)\,dx\right]}=e^{iQ(x)} \quad (29)$$

$$ik(x)e^{iQ(x)}\int e^{-iQ(x)}dx=g(x) \quad (30)$$

则(8)式通过计算可得下列方程:

$$V_1V_2\frac{\partial^2\alpha_1(x)}{\partial x^2}-i\Omega(V_1+V_2)\frac{\partial\alpha_1(x)}{\partial x}$$

$$-[\Omega^2+\gamma_0^2+\gamma_0^2 g(x)]\alpha_1(x)=0 \quad (31)$$

显然$g(x)$是一未定函数，它决定于等离子体的分布情况，在激光加热等离子体中，由于光压及被加热等离子体向外喷射和向内推进，致使等离子体密度由外向里是不断增加的，因为折射率是

$$n^2=1-\frac{4\pi e^2N(x)}{m\omega^2},$$

故$k(x)$也是变化的，Rosenbluth[1]曾采用$k(x)=k'x$的线性变化关系。现在我们为了计算$g(x)$也采用同一表式，于是由(29)式的定义:

$$Q(x)=\frac{\Omega}{V_2}x+\frac{1}{2}k'x^2 \quad (32)$$

若平面型等离子体甚薄，即$x\ll 1$，若$k'\sim\frac{\Omega}{V_2}$，则(32)式x^2项可忽略不计，于是由(30)得:

$$g(x)=k'x^2 \quad (33)$$

(33)式的获得曾采用$e^{iQ(x)}\approx 1-iQ(x)$的近似关系。把(33)式代入(31)式便得微分方程式为:

$$V_1V_2\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-i\Omega_1(V_1+V_2)\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}$$

$$-(\Omega^2+\gamma_0^2+k'\gamma_0^2x^2)\alpha_1=0 \quad (34)$$

作变量变换

$$u=\alpha_1(x)e^{-\frac{i}{2}\frac{\Omega(V_1+V_2)}{V_1V_2}x} \quad (35)$$

得:

$$u''+Iu=0 \quad (36)$$

$$I=-\left(\frac{\Omega^2}{V_1V_2}+\frac{\gamma_0^2}{V_1V_2}(1+k'x^2)\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{\Omega(V_1+V_2)}{V_1V_2}\right)^2 \quad (37)$$

可将(37)式进一步化简成:

$$I=-\frac{\gamma_0^2 k'}{V_1V_2}\left(x^2-\left(\frac{\Omega^2(V_1-V_2)^2}{4\gamma_0^2 V_1V_2}-1\right)\frac{1}{k'}\right) \tag{38}$$

再做变量变换，令：

$$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma_0^2 k'}{V_1V_2}\right)^{-\frac{1}{4}}y \tag{39}$$

则(36)式便变成

$$4\frac{d^2u}{dy^2}-\left[y^2-2\left(\frac{\gamma_0^2}{k'V_1V_2}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{\Omega^2(V_1-V_2)^2}{4\gamma_0^2 V_1V_2}-1\right)\right]u=0 \tag{40}$$

令

$$b=-2\left(\frac{\gamma_0^2}{k'V_1V_2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\Omega^2(V_1-V_2)^2}{4\gamma_0^2 V_1V_2}-1\right)=-2(2m+1) \tag{41}$$

$m=0,\ 1,\ 2\cdots$ 自然数

于是(41)式便变成韦伯方程[3]，其解为：

$$u=2^{-\frac{1}{2}m}e^{-\frac{1}{4}y^2}\ H_m\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \tag{42}$$

式中 H_m 为厄米特多项式；m 为其阶数。由(41)式容易解出：

$$\Omega=\frac{2\gamma_0(V_1V_2)^{\frac{1}{2}}}{V_1-V_2}\left[(2m+1)\frac{(k'V_1V_2)^{\frac{1}{2}}}{\gamma_0}+1\right]^{\frac{1}{2}} \tag{43}$$

可以看出凡符合如下条件(43)的绝对值即为波的增率表示式：

$$\gamma_0<0,\ V_2>V_1$$
$$(2m+1)\frac{(k'V_1V_2)^{\frac{1}{2}}}{|\gamma_0|}>1 \tag{44}$$

由(42)及(35)式知，不稳定波的振幅由厄米特多项式所描述，虽然由(43)知，阶数愈高，增率亦愈大；然而由(42)知 $e^{-\frac{1}{2}m}$ 因子存在初始扰动幅度将随阶数高而按指数下降。另外如果

$$\frac{(k'V_1V_2)^{\frac{1}{2}}}{|\gamma_0|}<1,$$

则将在某一特定 m_0 阶以上的不稳定的扰动波模式才会存在，显然：

$$m_0\geqslant\frac{|\gamma_0|}{2(k'V_1V_2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2} \tag{45}$$

参 考 文 献

[1] Marshall N. Rosenbluth; *Phys. Rev. Lett.*, 1972, **29**, 565.

[2] D. Pesme *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1974, **31**, 203.

[3] E. 卡姆克编，张鸿林译；《常微分方程手册》，科学出版社出版，1977 年，p.488。

(上接第 19 页)

色，用 60 瓦台灯照明，以 1/30 秒和 5.6 的光圈数，在 21° 胶卷上摄得的。

四、结　　论

通过我们的实验表明亚甲基蓝染料是一种有效的敏化剂，用这种染料可以将重铬酸盐明胶的感光范围扩展到红光区域，我们获得了 84% 的光栅效率，并制作了满意的可用白光再现的李普曼全息图。

参 考 文 献

[1] M. Akagi; *Photogr. Sci. Eng.*, 1974, **18**, No. 3, 248.

[2] A. Graube; *Photogr. Sci. Eng.*, 1978, **22**, No. 1, 37.