脉冲染料激光腔的频率特性

张培林　赵朔嫣

（清华大学激光物理研究室）

提要：本文提出一种计算脉冲染料激光腔的频率特性的新方法。对包括有单、双光栅、标准具和谐振反射器等选频元件的几种典型腔进行了研究。得到光栅照射条纹数和谐振反射器光学厚度对线宽的影响，理论和实验符合。

Frequency characteristics of passive cavity for pulsed dye lasers

Zhang Peilin　Zhao Shuoyan

(Laboratory of Laser Physics, Qinghua University)

Abstract: A new method for calculating selected frequency and linewidth of a passive cavity for pulsed dye lasers is presented. Several typical cavities containing gratings, etalons and resonant reflector as frequency selective elements are studied. The influence of groove number of gratings and the optical thickness of the resonant reflector upon linewidth are discussed. The theoretical values are in agreement with the experimental results.

已报导有几种典型的腔可获得窄线宽脉冲染料激光输出，如 MEG 腔[1]、MGM 腔[2,3]、MGG 腔[4,5]、RGM 腔[6]、RGG 腔[7]等，它们都是由反射镜 M、光栅 G、谐振反射器 R 和腔内标准具 E 等选频元件组成的。而其关于线宽的理论计算都是从光束发散角和选频元件的角色散率出发进行的。这存在两方面的问题。一是未考虑选频元件固有线宽的影响，实际上即使光束发散角很小，由此导致腔仍具有一定的线宽；另一是较复杂的腔常包括有谐振反射器、标准具等具有固有谐振频率的元件，因此可能出现某些元件的固有频率不同于光栅的调谐频率的情况。这些都是已有的计算方法所未能解决的。本文提出一种新的方法，从各种选频元件的频率特性出发，求出腔的整体频率响应函数，由此既可定出腔的单程线宽又可定出腔的选择频率。

一、选频元件的光强-频率因子

对于各种选频元件，入射光的复振幅 A_0 和出射光的复振幅 A 可写成下述形式：

$$\frac{A}{A_0}=\sqrt{\eta}\cdot\sqrt{\varphi(\nu)}\cdot e^{-i\beta(\nu)} \qquad (1)$$

其中选频元件效率 η 是频率 ν 的慢变函数，在计算腔的线宽一类特性时可视为不随频率改变；$\varphi(\nu)$ 表示归一化的光强频率因子（归一化到其最大取值为 1）；$\beta(\nu)$ 表示周相-频率因子。

收稿日期：1980 年 11 月 14 日。

对于光栅[8]，设中心光线的入射角和衍射角分别为 α'、α''，考虑到光束有一定的发散性，任一光线的入射角和衍射角应分别写为 $\alpha'+\delta\alpha'$、$\alpha''+\delta\alpha''$；$\delta\alpha'$、$\delta\alpha''$ 分别表示入射光线、衍射光线偏离中心光线的角元。则

$$\varphi_G(\nu)=\frac{\sin^2 x}{N^2\sin^2\dfrac{x}{N}}\simeq\frac{\sin^2 x}{x^2} \tag{2}$$

$$\beta_G(\nu)=(N-1)\pi\frac{\nu}{c}a\left[\sin(\alpha'+\delta\alpha')+\sin(\alpha''+\delta\alpha'')\right] \tag{3}$$

其中

$$x=N\pi\left\{\frac{\nu}{c}a\left[\sin(\alpha'+\delta\alpha')+\sin(\alpha''+\delta\alpha'')\right]-m\right\}, \tag{4}$$

N 是光栅总条纹数，a 是栅距，c 是真空中光速，m 是衍射级次。为减少光栅的衍射损失，常使光栅只出现一级衍射光，例如可选择 a、λ 满足 $1<\dfrac{\lambda}{a}<2$ 的条件。然而下面的计算并不限于 $m=1$。

有的腔使用谐振反射器代替平面镜输出，谐振反射器实际上是一个垂直入射的反射式标准具，但不是插入腔内而是置于腔的一端使用。如果忽略表面的反射时的吸收，可计算出相应的 $\varphi_R(\nu)$ 和 $\beta_R(\nu)$。显然反射光的峰值越高越锐，它的选频性能就越好。这就要求两个表面的光强反射率相等，以 r 表示，且 r 值较小。故选用不镀膜的石英玻璃谐振反射器，此时

$$r=\left(\frac{n_R-1}{n_R+1}\right)^2 \tag{5}$$

相应的

$$\varphi_R(\nu)=\frac{(1+r)^2\sin^2(2\pi\nu n_R l_R/c)}{(1-r)^2+4r\sin^2(2\pi\nu n_R l_R/c)} \tag{6}$$

$$\beta_R(\nu)=\mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{1-r}{1+r}\cot\frac{2\pi\nu n_R l_R}{c}\right) \tag{7}$$

其中 n_R 是谐振反射器介质的折射率，l_R 是厚度。

对于插入腔内的标准具，可类似地求出：

$$\varphi_E(\nu)=\frac{(1-r)^2}{(1-r)^2+4r\sin^2\dfrac{\delta}{2}} \tag{8}$$

$$\beta_E(\nu)=\mathrm{tg}^{-1}\frac{r\sin\delta}{1-r\cos\delta} \tag{9}$$

式中

$$\delta=\frac{4\pi\nu n_E l_E}{c}\sqrt{1-\frac{\sin^2(\alpha+\delta\alpha^*)}{n_E^2}} \tag{10}$$

$\alpha+\delta\alpha^*$ 是入射(出射)光线和标准具法线的夹角。其他符号的意义与前类似。

对于其他选频元件，可类似地引入 $\varphi(\nu)$ 和 $\beta(\nu)$。

由于谐振反射器和标准具的附加周相 $\beta_R(\nu)$、$\beta_E(\nu)$ 不与频率成正比，相邻纵模的频率间隔变为不等。标准具的情况已在[9]中报导，谐振反射器的相应现象已在我们的实验中观察到。至于单纵模输出的线宽，约略等于光脉冲持续时间的傅里叶极限[6]。

二、腔的频率响应函数、线宽和选择频率

大多数脉冲染料激光器工作于多纵模状态，此时重要的是多模输出线宽 $2\delta\nu_c$ 和腔的选择频率 ν_c (即腔损耗为最低值时的频率)。为此引入腔的频率响应函数 $\Phi(\nu)$：

$$\Phi(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1\cdot\varphi_2\cdots\varphi_p D(\delta\alpha_I)\times D(\delta\alpha_{II})d(\delta\alpha_I)d(\delta\alpha_{II}) \tag{11}$$

式中 φ_1、$\varphi_2\cdots\varphi_p$ 为光在腔内往返一次所经过的选频元件的光强-频率因子的乘积(注意凡插入腔内的元件都使用二次，而组成腔的两端的元件则只使用一次)；$\delta\alpha_I$、$\delta\alpha_{II}$ 为自染料盒出射的光以及经选频元件作用后自腔的同一侧返回染料盒的光的角元；$D(\delta\alpha)$ 是光强按发散角的分布函数，由高斯光束的性质可得：

$$D(\delta\alpha)=e^{-2\left(\frac{\delta\alpha}{\delta\alpha_0}\right)^2} \tag{12}$$

$\delta\alpha_0$ 是光束的半发散角。

如前所述，一般说来 $\varphi_i(\nu)$ 是光线的入射角和出射角的函数。由于前面元件的出射光就是紧邻的次一元件的入射光，故

$$\delta\alpha''_i = \pm\delta\alpha'_{i+1} \tag{13}$$

正、负号要视光线传播具体情况而定。至于同一元件的入射角元 $\delta\alpha'_i$ 和出射角元 $\delta\alpha''_i$ 的关系，则由选频元件的性质决定。除了光栅的衍射角元 $\delta\alpha''_i$ 我们由下式确定外，

$$\frac{\partial\Phi(\nu)}{\partial(\delta\alpha''_i)} = 0 \tag{14}$$

其他都是显而易见的。(14)式物理上相当于光栅衍射方向应使光强取极大值。

腔的选择频率 ν_c 根据定义应使 $\Phi(\nu)$ 取极大值，

$$\left.\frac{\partial\Phi(\nu)}{\partial\nu}\right|_{\nu=\nu_c} = 0 \tag{15}$$

线宽 $2\delta\nu_c$ 可由以下两式定出：

$$\Phi(\nu_\pm) = \frac{1}{2}\Phi(\nu_c) \tag{16}$$

$$2\delta\nu_c = \nu_+ - \nu_- \tag{17}$$

应用此法对几种常用腔做了计算，其中数字部分用电子计算机完成的。

三、MGG 腔和 MGM 腔

MGG 腔由反射镜 M、掠角入射光栅 G_1、Littrow 用法光栅 G_2 组成，其频率响应函数为：

$$\Phi_{GG}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x_1}{x_1^2}\cdot\frac{\sin^2 x_2}{x_2^2}\cdot\frac{\sin^2 x_3}{x_3^2} \cdot D(\delta\alpha_I)D(\delta\alpha_{II})d(\delta\alpha_I)d(\delta\alpha_{II}) \tag{18}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= N_1\pi\left\{\frac{a_1\nu}{c}\left[\sin(\alpha'_1+\delta\alpha_I) + \sin(\alpha''_1+\delta\alpha''_1)\right]-m_1\right\}\\
x_2 &= N_2\pi\left\{\frac{a_2\nu}{c}\left[\sin(\alpha_2-\delta\alpha''_1) + \sin(\alpha_2+\delta\alpha''_2)\right]-m_2\right\}\\
x_3 &= N_1\pi\left\{\frac{a_1\nu}{c}\left[\sin(\alpha''_1-\delta\alpha''_2) + \sin(\alpha'_1+\delta\alpha_{II})\right]-m_1\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

在此利用了中心光线在腔内往返传播时是按同一路线进行的条件。$\delta\alpha''_1$、$\delta\alpha''_2$ 可由(14)式确定。注意该式对任意的分布函数因子 $D(\delta\alpha)$ 都是成立的，还应注意光栅 G_1 的照射条纹数 N_1 和光栅 G_2 的照射条纹数 N_2 并不是独立变量而有一定关系(图 1)：

$$N_1a_1\cos\alpha''_1 = N_2a_2\cos\alpha_2 \tag{20}$$

便可得出： $x_1 = x_2 = x_3 \equiv x$

$$x = \frac{\pi}{3}\left[\frac{\nu}{c}N_1a_1\cos\alpha'_1\cdot 2\delta\alpha + (2m_1N_1+m_2N_2)\frac{\delta\nu}{\nu}\right] \tag{21}$$

其中

$$\delta\alpha = \frac{1}{2}(\delta\alpha_I + \delta\alpha_{II}) \tag{22}$$

$$\delta\nu = \nu - \nu_{GG} \tag{23}$$

而

$$\nu_{GG} = \frac{\left[\left(\frac{m_1}{a_1}\right)^2 + \frac{m_1m_2}{a_1a_2}\cos\gamma + \left(\frac{m_2}{2a_2}\right)^2\right]\cdot c}{\left[\frac{m_1}{a_1}+\frac{m_2}{2a_2}\cos\gamma\right]\sin\alpha'_1 + \sin\gamma\left[\left(\frac{m_1}{a_1}\right)^2 + \frac{m_1m_2}{a_1a_2}\cos\gamma + \left(\frac{m_2}{2a_2}\right)^2\cos\alpha'_1\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{24}$$

是 MGG 腔的选择频率[5]，γ 是光栅 G_1、G_2 法线的夹角，

$$\gamma = \alpha''_1 + \alpha_2 \tag{25}$$

利用(21)式，$\Phi_{GG}(\nu)$ 可简化为：

$$\Phi_{GG}(\nu) = K\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\left(\frac{\delta\alpha}{\delta\alpha_0}\right)^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^6 d(\delta\alpha) \tag{26}$$

$$K = \sqrt{\pi}\cdot\delta\alpha_0 \tag{27}$$

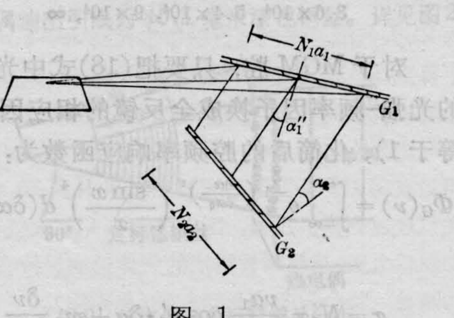

图 1

再根据(16)、(17)式求出相对半线宽 $\frac{\delta\nu_c}{\nu}$，与已有报导[1~6]的不同，本法能得到光栅照射条纹数对线宽的影响。图2是 $\frac{\delta\nu_c}{\nu}$ 随光栅 G_1 的掠入射角变化曲线，以 N_2 为参变量。图中过原点的直线为 $N_2\to\infty$ 的情形，此时

$$\left.\frac{\delta\nu_c}{\nu}\right|_{N_2\to\infty}=\sqrt{\ln 2}\times\frac{a_1 a_2\cos\alpha_2\cos\alpha_1'\cdot\delta\alpha_0}{2m_1 a_2\cos\alpha_2+m_2 a_1\cos\alpha_1''}\cdot\frac{\nu}{c} \tag{28}$$

$$\left.\frac{\delta\nu_c}{\nu}\right|_{N_2\to\infty}=0.8326\,\frac{\delta\nu_s}{\nu} \tag{29}$$

$\frac{\delta\nu_s}{\nu}$ 是Shoshan计算出的线宽[4]，可见Shoshan的结果只相当于 N_2 很大以致其对线宽的影响与发射角的贡献相比可以忽略的情形。

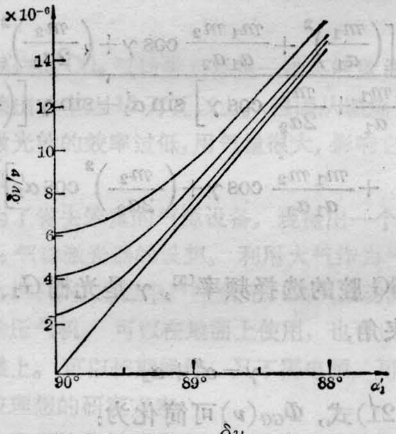

图2 MGG 腔 $\frac{\delta\nu}{\nu}-\alpha_1'$ 曲线

G_1—2400 线/毫米，$m_1=1$
G_2—1800 线/毫米，$m_2=1$
$\delta\alpha_0=2\times10^{-3}$，$\lambda=600$ 微米
曲线自上往下，参量 N_2 分别为：
3.6×10^4，5.4×10^4，9×10^4，∞

对于 MGM 腔，只要把(18)式中光栅 G_2 的光强-频率因子换成全反镜的相应因子(恒等于1)，化简后的腔频率响应函数为：

$$\Phi_G(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-4\left(\frac{\delta\alpha}{\delta\alpha_0}\right)^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 d(\delta\alpha)\cdot K \tag{30}$$

$$x=N_1\pi\,\frac{\nu a_1}{2c}\cos\alpha_1'\cdot\delta\alpha+m_1\frac{\delta\nu}{\nu} \tag{31}$$

$\delta\nu$ 为 ν 偏离 MGM 腔选择频率的值，$\frac{\delta\nu_c}{\nu}$ 曲线如图3，与前相似直线相当于 $N_1\to\infty$ 的情形，

$$\left.\frac{\delta\nu_c}{\nu}\right|_{N_1\to\infty}=\sqrt{\ln 2}\cdot\frac{a_1\cos\alpha_1'\cdot\delta\alpha_0}{2}\cdot\frac{\nu}{c}=0.8326\,\frac{\delta\nu_s'}{\nu} \tag{32}$$

$\frac{\delta\nu_s'}{\nu}$ 正是 Shoshan[2] 的结果。

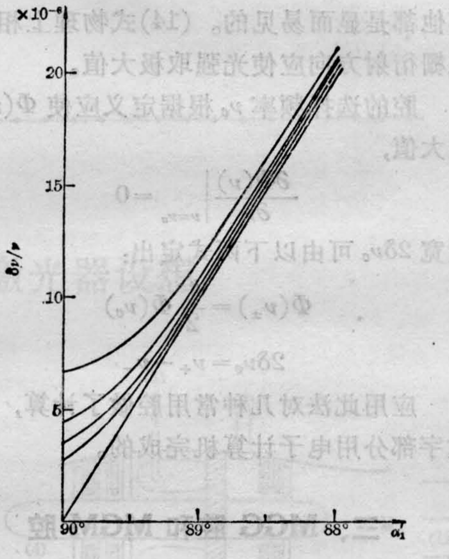

图3 MGM 腔 $\frac{\delta\nu}{\nu}-\alpha_1'$ 曲线

G_1、$\delta\alpha_0$、λ 同图2
曲线自上往下，参量 N_1 分别为：
4.8×10^4，7.2×10^4，9.6×10^4，12×10^4，∞

我们使用氮分子 337 毫微米激光泵浦的若丹明 6G 染料激光器对上述结论进行了验证。图4中圆点为实验值，曲线为计算值。由于计算值是未激活腔的单程线宽，而实验值是激光线宽，故在图中比较时已将计算值乘以适当的常数。由此可见，理论计算和实验结果是相符的。

由图2和图3看出，当光栅掠角入射角度接近 $90°$ 或 $\delta\alpha_0$ 很小时，光栅总条纹数的影响是不可忽视的。如果光栅照射条纹数不够多，仅仅增大入射角是不能获得很窄线宽的。还可看出，虽然一般说来 MGG 腔比

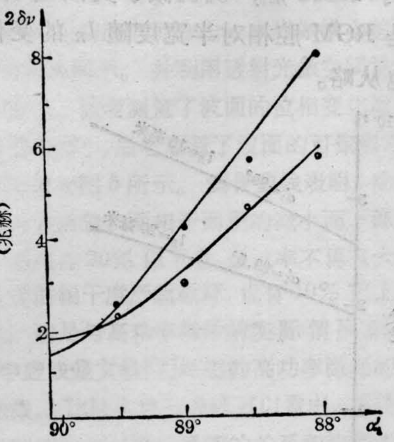

图 4 线宽实验值和理论值的比较

MGG 腔: ○ 实验值; ——计算曲线, $N_2=5.4\times10^4$
MGM 腔: · 实验值; ——计算曲线, $N_1=9.6\times10^4$
(其他参数同图 2)

MGM 腔选频性能要好，但如果光栅 G_2 的宽度 N_2a_2 不够大或使用的角度 α_2 较大，会导致光栅 G_1 的条纹未能完全照亮，此时如工作于几乎为 90° 的掠射角，MGG 腔的压缩线宽效果可能还不如使用宽度大的全反镜 M_2 将 G_1 的全部条纹都利用的 MGM 腔好。由于制作一个高效率、小栅距、大宽度的光栅 G_2 比制作一个大宽度的全反镜要困难得多，上述分析对于合理地选择压缩线宽的方案是有指导意义的。

四、RGG 腔和 RGM 腔

将 MGG 腔、MGM 腔的输出平面镜改为谐振反射器，就成为 RGG 腔、RGM 腔。因此将前者的频率响应函数乘以谐振反射器的光强-频率因子 $\varphi_R(\nu)$，就得到后者的频率响应函数。下面以 RGG 腔为例进行讨论。

首先谐振反射器的谐振频率 ν_R 与光栅 G_1、G_2 的调谐频率 ν_{GG} 不一定相同，由(6)式，

$$\nu_R=\frac{c}{2n_R l_R}\cdot\left(q+\frac{1}{2}\right),\ q\ 为整数 \quad (33)$$

而 ν_{GG} 由(24)式确定。设失谐率用 ϵ 表示

$$\epsilon=\frac{\nu_{GG}-\nu_R}{\nu} \quad (34)$$

则 $-\dfrac{\lambda}{4n_R l_R}<\epsilon<\dfrac{\lambda}{4n_R l_R}$。而有

$$\nu=\nu_R+\delta\nu=\nu_{GG}+\delta\nu-\epsilon\cdot\nu \quad (35)$$

RGG 腔的频率响应函数为

$$\Phi(\nu)=\varphi_R(\nu)\cdot\Phi_{GG}(\nu)$$

$$=\left\{\frac{(1+r)^2\cos^2\left(\dfrac{2\pi\nu n_R l_R}{c}\cdot\dfrac{\delta\nu}{\nu}\right)}{(1-r)^2+4r\cos^2\left(\dfrac{2\pi\nu n_R l_R}{c}\cdot\dfrac{\delta\nu}{\nu}\right)}\right\}$$

$$\times K\int_{-\infty}^{\infty}e^{-4\left(\frac{\delta\alpha}{\delta\alpha_0}\right)^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^6 d(\delta\alpha) \quad (36)$$

x 的表示式除了以 $\dfrac{\delta\nu}{\nu}-\epsilon$ 代换 $\dfrac{\delta\nu}{\nu}$ 外与(21)相同。由此可得出腔的选择频率 ν_c 如图 5 所示。可以指出的是，对于固定 l_R 的谐振反射器，调谐频率为 ν_{GG} 时，腔的选择频率的变化是有间断的，即不能连续调谐频率 ν_c，这是 RGG 腔的缺点。而按照(16)、(17)和(36)式计算出来的相对半线宽却几乎不受失谐率的影响，如图 6 所示。

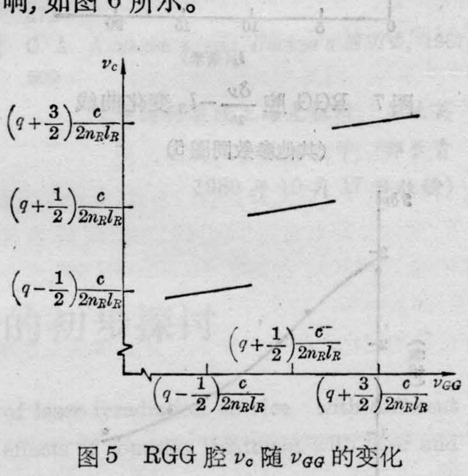

图 5 RGG 腔 ν_c 随 ν_{GG} 的变化

$n_R l_R=30$ 毫米; $r=0.04$; $N_2=5.4\times10^4$
(其他参数同图 2)

图 7 给出无失谐时相对半线宽随谐振反射器厚度 l_R 的变化曲线，由此可见增加 l_R 可以改善腔的选频性能获得更窄的线宽。然而增加 l_R 有一定限制，即必须保证在激光振荡阈值以上不能出现谐振反射器的另一峰值。

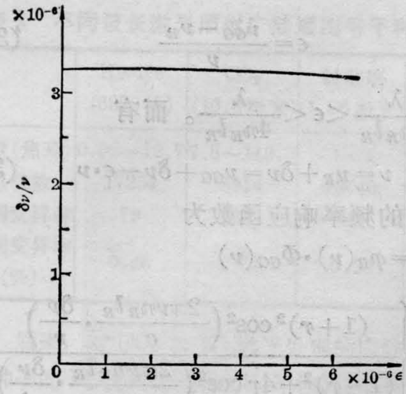

图 6　RGG 腔 $\frac{\delta\nu}{\nu}-\epsilon$ 变化曲线

(其他参数同图 5)

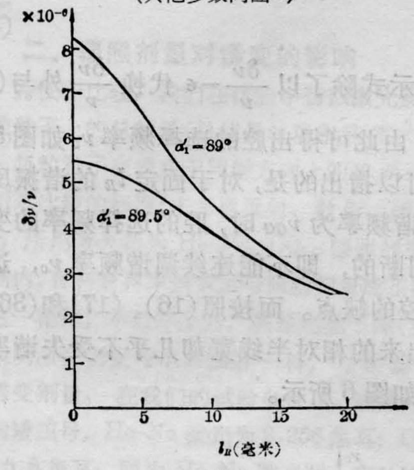

图 7　RGG 腔 $\frac{\delta\nu}{\nu}-l_R$ 变化曲线

(其他参数同图 5)

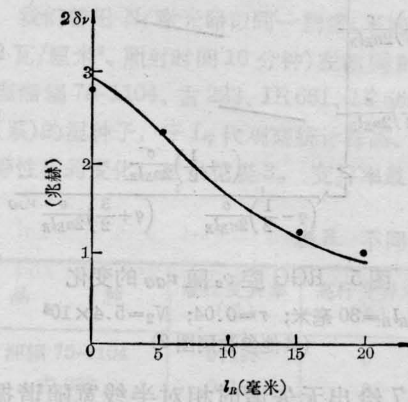

图 8　RGG 腔线宽实验值和理论值的比较

· 实验值, ——计算曲线; $\alpha_1'=89°$ (其他参数同图 5)

图 8 是实验值和计算值的比较。图 9 是相对半宽度随激光波长变化的曲线。

对于 RGM 腔, 我们做了类似的计算。图 10 是 RGM 腔相对半宽度随 l_R 的变化曲线, 其他从略。

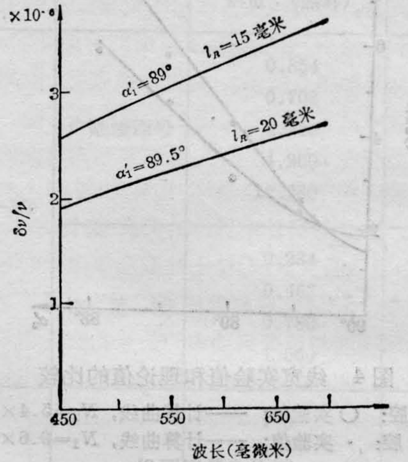

图 9　RGG 腔 $\frac{\delta\nu}{\nu}-\lambda$ 曲线

(其他参数同图 5)

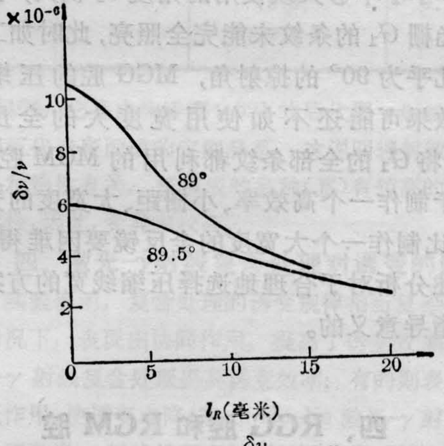

图 10　RGM 腔 $\frac{\delta\nu}{\nu}-l_R$ 曲线

$N_1=9.6\times10^4$ (其他参数同图 3)

参　考　文　献

[1] T. W. Hänsch; *Appl. Opt.*, 1972, **11**, 895.

[2] I. Shoshan *et al.*; *J. Appl. Phys.*, 1977, **48**, 4495.

[3] M. G. Littman, H. J. Metcalf; *Appl. Opt.*, 1978, **17**, 2224.

[4] I. Shoshan, et. al; *Opt. Commun.*, 1978, **25**, 375.

[5] M. G. Littman; *Opt. Lett.*, 1978, **3**, 138.

[6] S. Saikan; *Appl. Phys.*, 1978, **17**, 41.

[7] 张培林, 赵朔嫣; 《激光》, 1980, **7**, No. 11, 21.

[8] M. Born, E. Wolf; Principles of Optics, 2nd ed., 1964, Pergamon Press.

[9] D. D. Bhawalkar *et al.*; *Opt. Com.*, 1977, **23**, 427.