相对论电子在周期磁场中的辐射频谱

王润文　雷仕湛

（中国科学院上海光机所）

提要：分析了相对论电子在空间周期磁场中的运动轨迹。在一定条件下，电子在垂直原始入射方向上的运动是简谐的，利用谐振子模型求出了它的辐射频谱和频宽；最后讨论了运动的非谐性。得到辐射频谱分布将是与电子的初速度、磁场强度有关。

Radiation spectrum of relativistic electrons in a spatially periodic transverse magnetic field

Wang Runwen　Lei Shizhan

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: The motion track of relativistic electrons in a spatially periodic transverse magnetic field has been analysed. Under some conditions, the electron motion is harmonic in the direction perpendicular to the original incident one. Radiation spectrum and spectral width have been obtained using harmonic mode, nonhamonic is also discussed. It has been shown that radiation spectrum depends on the initial electron velocity and the intensity of magnetic field.

一、引　　言

在50年代初，H. Motz[1] 分析了相对论电子束在周期电场和磁场中运动会产生辐射的情况。根据这一研究结果，在60年代初科学家开展了自由电子激光器的研究[2]，并在1974年获得了毫米波段的受激发射[3]，在1975年获得了近红外波段的受激发射[4]。因为这种类型激光器具有良好的可调谐性，以及可能产生极短波长的受激辐射，而且可以期望获得很高的功率，因而自由电子激光器也就成为科学工作者很注意研究的课题。本文讨论的是相对论电子在空间周期变化的磁场中运动时产生的辐射频谱。

二、谐振子模型

设有如图1的磁场分布。磁场沿 x 方向，电子沿 y 方向垂直磁场方向进入磁场区域。

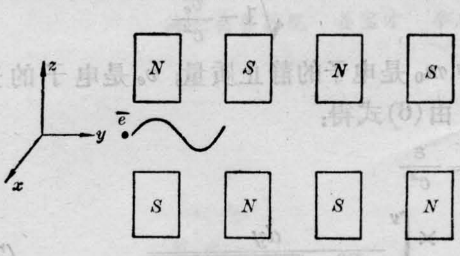

图 1

取磁场沿 x 方向、沿 y 方向周期变化，即 $\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{e}_x$。在满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 的条件下，取 $\boldsymbol{B}$ 如

收稿日期：1980年12月24日。

下的分布形式:

$$\boldsymbol{B}=\left(\frac{4B_x}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\sin\frac{2n+1}{\lambda}\pi y\right)\boldsymbol{e}_x \tag{1}$$

式中的 B_x 是磁场强度，它是一个常数 $B=B_x$; λ 是磁场的空间周期长度。电子在这样的磁场中的运动方程是:

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\frac{-|e|}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B} \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 是电子的动量; $|e|$ 是电子的电荷; $\boldsymbol{V}$ 是电子运动速度; c 是光速。由(2)写出沿 z 方向的运动:

$$\frac{dP_z}{dt}=\frac{4e}{c}V_y\frac{B}{\pi}\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\times\sin\frac{2n+1}{\lambda}\pi y \tag{3}$$

将(3)积分后得:

$$P_z=\frac{4eB\lambda}{c\pi^2}\sum_{n}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{2n+1}{\lambda}\pi y \tag{4}$$

设电子辐射的能量只占其运动能量的极小的一部分，沿 y 方向的动量 P_y 由下面的关系决定:

$$P_y=\sqrt{P_0^2-P_z^2} \tag{5}$$

式中 P_0 是电子进入磁场区时的初始动量。电子的运动速度与动量、能量之间的关系为:

$$\boldsymbol{V}=\frac{c^2}{\varepsilon}\boldsymbol{P} \tag{6}$$

式中的 ε 为电子的动能:

$$\varepsilon=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_e^2}{c^2}}}$$

其中 m_0 是电子的静止质量; v_e 是电子的速度。由(6)式得:

$$t=\frac{\varepsilon}{c^2}\times\int_0^y\frac{dy}{P_0^2\sqrt{1-K^2f^2(y)}} \tag{7}$$

其中 $f(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}-\cos\frac{2n+1}{\lambda}\pi y$

$$K=\frac{4Be\lambda}{\pi^2P_0}$$

利用 TQ-16 电子计算机求解方程(7)，结果示于图2。从图2可以看出，当 $K<1$，电子沿 y 方向的运动轨迹便接近线性，即近似地有如下关系:

$$y=at \tag{8}$$

其中的系数 a 接近电子的初速度 v_e。事实上，由方程(7)可知，分母中括号内的数值最大值是 $(\pi^2/8)^2\approx1$，当 $K<1$ 时，

$$K^2\left[\sum\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{2n+1}{\lambda}\pi y\right]^2<1$$

所以，方程(6)近似地为:

$$\frac{\varepsilon P_0}{c^2}t+\int_0^y\left\{1+\frac{K^2}{2}\times\left[\sum\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{2n+1}{\lambda}\pi y\right]^2\right\}dy\approx y+\frac{3K^2}{1180}y$$

而 $\frac{\varepsilon P_0}{c^2}\approx v_e$

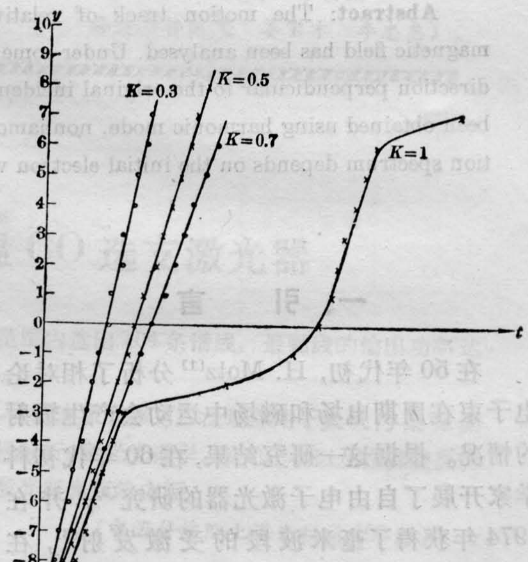

图 2

现在讨论电子沿 z 方向的运动。

$$\frac{dz}{dt}=\frac{c^2}{\varepsilon}P_z$$

$$=\frac{c^2}{\pi^2\varepsilon}\cdot\frac{4eB\lambda}{c}\sum\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{2n+1}{\lambda}\pi y$$

把(8)代入后，并进行积分得：

$$z=\frac{4eB\lambda c}{\pi^2\varepsilon}\frac{\lambda}{\pi a}\times\left(\sin\frac{\pi a}{\lambda}t+\frac{1}{27}\sin\frac{3\pi at}{\lambda}\cdots\right) \quad (9)$$

为了考察自由电子在周期磁场中运动时产生辐射的物理图象，我们从最简单的情形开始，当只取(9)式中括号内的第一项时，即：

$$z=\frac{4eB\lambda c}{\varepsilon\pi^2}\frac{\lambda}{\pi a}\sin\frac{\pi a}{\lambda}t \quad (10)$$

显然，这便是简谐振子的运动方程。由(10)式得：

$$\ddot{z}=-\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)^2 z$$

于是，这谐振子的势能 U 为：

$$U=m_0\int_0^y\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)^2 z\,dz=\frac{m_0}{2}\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)^2 z^2=2\pi^2\nu_0^2 m_0 z^2 \quad (11)$$

式中的 ν_0 为：

$$\nu_0=a/2\lambda \quad (12)$$

谐振子的薛定谔方程为：

$$\frac{d^2\psi}{dz^2}+\frac{8\pi^2 m_0}{h^2}(E-2\pi^2\nu_0^2 m_0 z^2)\psi=0 \quad (13)$$

式中 ψ 是振子的波函数，E 是它的总能量。在满足方程(13)所有的波函数 ψ 中，振子的能量 E 只有在取如下的数值

$$E_n=h\nu_0\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$n=1,\ 2,\ 3\cdots$$

时才能满足边界条件。通过以上的讨论我们可以看到，自由电子在空间周期变化的磁场中运动，可以看作一个是在外场中作谐振运动的谐振子，它的能量是不连续的。于是可能获得一列以下面频率为基频的电磁辐射：

$$\nu_0=\frac{a}{2\lambda} \quad (14)$$

因为电子是在运动着的，按照多普勒原理，我们在实验室接收到的辐射频率为

$$\nu'=\nu_0(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}/(1-\beta) \quad (15)$$

式中 $\beta=v_e/c$。

又因为电子是在有限长度的磁场区域内运动，也就是说，电子所发射的光辐射就不是严格单色的，而是有一定的线宽。在我们的近似中，可以假定表征辐射的光电场强度矢量 ε 与振子振动振幅成比例*，即

$$\varepsilon=\varepsilon_0\sin\frac{\pi a}{\lambda}t=\varepsilon_0\sin 2\pi\nu_0 t \quad (16)$$

对(16)式进行傅里叶变换，得

$$\varepsilon(\nu)=\varepsilon_0\int_0^{\frac{T}{2}}\sin 2\pi\nu_0 t e^{i2\pi\nu}dt \quad (17)$$

式中的积分限 T 为：

$$T=N\cdot\frac{\lambda}{a}$$

其中 N 是磁场空间周期数目。(17)式积分后整理得：

$$\varepsilon(\nu)=\frac{\varepsilon_0}{2\pi}\left[\frac{\sin(\nu+\nu_0)\pi T}{\nu_0+\nu}+\frac{\sin(\nu-\nu_0)\pi T}{\nu-\nu_0}\right]$$

因为 $\nu\sim\nu_0$，所以第二项比第一项实际重要得多，也即说，

$$\varepsilon(\nu)\approx\frac{\varepsilon_0}{2\pi}\frac{\sin(\nu-\nu_0)\pi T}{\nu-\nu_0} \quad (18)$$

当 $\nu=\nu_0$ 时，$\varepsilon(\nu)$ 达到极大，而当 $(\nu-\nu_0)\pi T=n\pi$ 时，$\varepsilon(\nu)=0$，所以辐射谱线全宽度为：

$$2(\nu-\nu_0)=\frac{2}{T}=\frac{2}{N}\frac{a}{\lambda} \quad (19)$$

而辐射谱中谱线的频率 ν_0 为：

$$\nu_0=\frac{a}{2\lambda}$$

所以，谱线的全宽度 $\Delta\nu$ 为

$$\Delta\nu=\frac{4}{N}\nu_0 \quad (20)$$

也就是说，如果磁场的空间周期数目 N 越大，辐射的单色性会越好。

三、非谐性

上面我们从谐振子模型得到了自由电子在空间周期磁场中运动时发射频率间隔相

* 更严格地说，$\varepsilon\sim\ddot{z}$。

等的辐射。事实上，电子的运动并不是严格简谐的，特别是当磁场强度比较强时尤其如此。根据(9)式，电子的运动进一步近似地取形式：

$$z=\frac{4\lambda Bce}{\varepsilon\pi^2}\cdot\frac{\lambda}{\pi a}\times\left[\sin\frac{\pi at}{\lambda}+\frac{1}{27}\sin\frac{3\pi a}{\lambda}t\right]\quad(10')$$

$$\dot{z}=\frac{4\lambda Bce}{\varepsilon\pi^2}\left[\cos\frac{\pi at}{\lambda}+\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi a}{\lambda}t\right]$$

$$\ddot{z}=-\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)^2 z-\frac{32}{27}\times\frac{4\lambda^2 Bec}{\pi^2 a\varepsilon}\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)^2\sin\frac{3\pi a}{\lambda}t$$

上面 z 上打点表示是对时间 t 的导数。相应地振子的势能 U 为：

$$U=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)^2 m_0z^2+\frac{32}{27}\frac{4eB\lambda^2mc}{\varepsilon\pi^2a}\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)^2\times\int_0^z\sin\frac{3\pi y}{\lambda}\left(\frac{dz}{dy}\right)dy$$

$$\approx2\pi^2m_0\nu_0^2z^2+3Q-2Q\cos\frac{2\pi}{\lambda}z-Q\cos\frac{4\pi}{\lambda}z\quad(21)$$

式中 $$Q=\frac{4c}{27\varepsilon}\left(\frac{4eB\lambda}{\pi^3}\right)^2$$

从式(21)看到，电子在 $z\approx n\cdot\frac{\lambda}{4\pi}$ 附近的运动是简谐的。

在考虑非谐的情况下振子的薛定谔方程为：

$$\frac{d^2\psi}{dz^2}+\frac{8\pi^2m_0}{h^2}\Big\{E-3Q-2\pi^2\nu_0^2m_0z^2+2Q\cos\frac{2\pi}{\lambda}z+Q\cos\frac{4\pi}{\lambda}z\Big\}\psi=0\quad(22)$$

方程(22)可以利用级数展开形式进行求解，在满足方程(22)同时满足边界条件的要求下，能量 E 所取值为：

$$E_n=h\nu_0\left(n+\frac{1}{2}\right)-Qf(a,\ n)\quad(23)$$

其中 $f(a,\ n)$ 是参数 a 和辐射谱的数目 n 的函数。因为参数 Q 正比于磁场强度，所以，自由电子在空间磁场中运动的能量既与电子的速度有关，也与磁场强度有关。相邻两个能态的频率间隔随着高频发展而减小，变化的数量还与磁场强度有关。因此，在实际上自由电子发射的频率谱将不是单一频率，其频率间隔也不相等，辐射谱分布与电子的初速度、磁场强度都有关系。

参 考 文 献

[1] H. Motz; *J. Appl. Phys.*, 1951, **22**, 527.

[2] R. H. Pantill *et al.*; *IEEE J. Quant. Electr.*, 1968, **QE-4**, 905.
J. M. J. Madey; *J. Appl. Phys.*, 1971, **42**, 1906.
王之江；《自由电子振荡辐射》，长春光机所刊集，1964.

[3] V. L. Granatstein; *IEEE Trans. Microwaves Theory Tech.*, 1974, **MTT-22**, 1000.

[4] L. R. Elias *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1976, **36**, 717.