激光束的空间调制

谢 培 良

（中国科学院上海光机所）

提要：本文研究了激光束的空间调制问题，得到了栅形、缝形、孔形、扇形调制器的激光束调制场分布式，给出了光强分布图，介绍了初步实验结果。

Spatial modulation of laser beam

Xie Peiliang

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechenics, Academia Sinica)

Abstract: The problems on spatial modulation of laser beams are investigated. The formulas are derived for field distributions of the modulated beams with grid, slit, circuar and fan-shaped modulators. Profiles for field distributions are given and experimental results described.

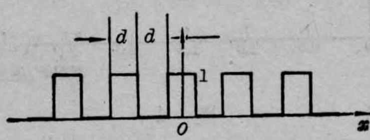
一、引 言

在激光束光路中，引进一个空间调制器，则在其后的近区及远区，产生激光强度的调制分布，采用合适的调制器及调制参量，可以得到所希望的光强分布。近年来有人研究过周期性空间调制问题[1]，本文进一步研究几种周期及非周期空间调制器，并在调制函数中引入了两个相位误差项，以使调制场表达式趋于完备。

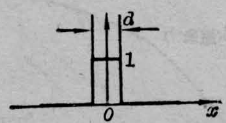
设 f 为调制器透过光束振幅 A_1 的调制函数(如图1)。$f-1$ 为透过光束振幅 $-A_1$ 的调制函数，f 和 $f-1$ 的复相位误差分别为 $\delta_1=\beta_1+j\alpha_1$，$\delta_2=\beta_2+j\alpha_2$，$\beta$ 和 α 分别表示相位常数及衰减常数，于是，调制器调制函数一般表达式为

$$F=f(e^{i\delta_1}+e^{i\delta_2})-e^{i\delta_2} \tag{1}$$

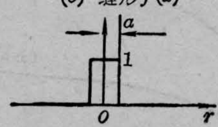
对直角坐标系，光束经调制后，场分布为[2]



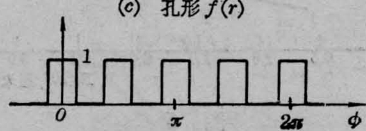
(a) 栅形 $f(x)$



(b) 缝形 $f(x)$



(c) 孔形 $f(r)$



(d) 扇形 $f(\phi)$

图1 调制函数 f

收稿日期：1980年5月14日。

$$A(x_1,\ y_1)=\frac{i\exp(-ikl)}{\lambda l}\iint_{-\infty}^{\infty}A_1F(x)$$
$$\times\exp\left\{\frac{-ik[(x_1-x)^2+(y_1-y)^2]}{2l}\right\}$$
$$\times dx\,dy \tag{2}$$

式中 A_1 为基模高斯光束振幅分布，对于一维调制器，在 $y_1=0$ 的调制场振幅分布则得：

$$A(x_1)=B[(e^{i\delta_1}+e^{i\delta_2})S$$
$$-e^{i\delta_2}\sqrt{\pi\alpha}\,W\exp(-\alpha X_1^2)] \tag{3}$$

其中 $B=i\sqrt{2\alpha}\,\dfrac{\exp(-ikl)}{\lambda l}\exp\left(-\dfrac{ikx_1^2}{2l}\right)$；

$X_1=\dfrac{kWx_1}{2l}$；$\alpha=\dfrac{1}{1+j\phi}$；$\phi=\dfrac{kW^2}{2}\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{l}\right)$。

W 为基模光斑半径；R 为球面波前曲率半径；而

$$S=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\exp\left(-\alpha\frac{x^2}{W^2}\right)$$
$$\times\exp\left(\frac{ikx_1}{l}x\right)dx \tag{4}$$

对于极坐标系，基模光束调制后振幅分布为

$$A(r_1,\phi_1)=b\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}f(r,\ \phi)\exp\left(-\frac{r^2}{\alpha W^2}\right)$$
$$\times\exp\left[\frac{ikr_1r}{l}\cos(\phi-\phi_1)\right]$$
$$\times r\,d\,r\phi \tag{5}$$

对于仅有径向变化的调制函数 $f(r)$，得到

$$A(r_1)=2\pi b\left[(e^{i\delta_1}+e^{i\delta_2})S\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha W^2}{2}e^{i\delta_2}\exp(-\alpha\rho^2)\right] \tag{6}$$

式中 $b=i\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{W}\dfrac{\exp(-ikl)}{\lambda l}\exp\left(-\dfrac{ikr_1^2}{2l}\right)$；

$\rho=\dfrac{kWr_1}{2l}$；

而

$$S=\int_0^{\infty}rf(r)\exp\left(-\frac{r^2}{\alpha W^2}\right)J_0\left(\frac{kr_1}{l}r\right)dr。 \tag{7}$$

二、栅形调制器

间隔为 d 的栅形调制器，有两种调制安置方式，对于反对称安置时，调制函数可表示为：

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left[\frac{(2n-1)\pi x}{d}\right] \tag{8a}$$

对称安置时(图 1(a))，调制函数 $f(x)$ 为

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$
$$\times\cos\left[\frac{(2n-1)\pi x}{d}\right] \tag{8b}$$

1. 反对称栅形调制器

由(8a)、(4)、(3)式，根据光强 $I=A_1\cdot A_1^*$，得到

$$I=I_0\exp\left(-\frac{2X_1^2}{1+\phi^2}\right)$$
$$\times\left|\frac{e^{i\delta_1}+e^{i\delta_2}}{2}\left\{1+\frac{i4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\right.\right.$$
$$\times\exp\left[-\frac{\alpha\pi^2(2n-1)^2}{4D^2}\right]$$
$$\left.\left.\times\mathrm{sh}\frac{\pi(2n-1)\alpha X_1}{D}\right\}-e^{i\delta_2}\right|^2 \tag{9a}$$

式中 $D=\dfrac{d}{W}$；$I_0=\dfrac{2\pi W^2}{(1+\phi^2)\lambda^2l^2}$ 为光轴上的光强。

当 $\delta_1=\delta_2=0$，为矩形相位栅调制器，光强分布为

$$I=I_0\frac{16}{\pi^2}\exp\left(-\frac{2X_1^2}{1+\phi^2}\right)$$
$$\times\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\exp\left[-\frac{\alpha\pi^2(2n-1)^2}{4D^2}\right]\right.$$
$$\left.\times\mathrm{sh}\frac{\pi(2n-1)\alpha X_1}{D}\right|^2 \tag{9b}$$

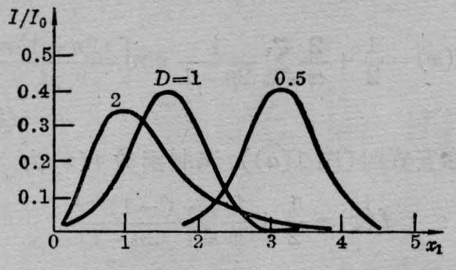
在远区($\alpha=1$)，光强分布有两个对称的主旁瓣(图 2(a))，容易得到，二维的网格形相位调制器有四个主旁瓣。

当 $\delta_1=0$、$\delta_2=j\infty$ 或 $\delta_1=j\infty$、$\delta_2=0$ 为遮盖和透明相间的栅形调制器，图 2(b) 为它的远区光强分布图，在轴上光强有极大值 $I_0/4$。

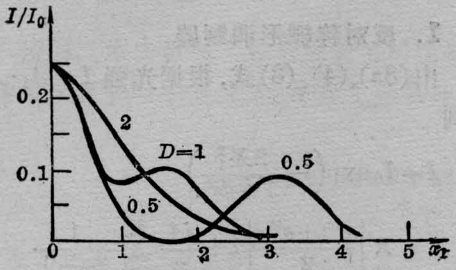
容易导得基模高斯光束的正弦调制

$$F(x)=\sin\frac{\pi x}{d}$$

光强分布为



(a) 相位调制器($\delta_1=\delta_2=0$)



(b) 遮盖透明相间($\delta_1=0$, $\delta_2=j\infty$ 或 $\delta_1=j\infty$, $\delta_2=0$)

图 2 反对称栅形调制器远区光强分布

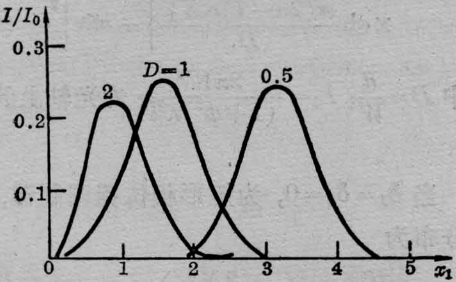


图 3 高斯光束正弦调制远区光强分布

$$I=I_0\exp\left[-\frac{\pi^2+4X_1^2}{2(1+\phi^2)}\right]\left|\operatorname{sh}\frac{\alpha\pi X_1}{D}\right|^2 \tag{10}$$

其远区分布有两个对称主旁瓣(图3),与图2(a)比较,后者峰值较小,这是由于正弦调制器对光束有损耗引起的。

2. 对称栅形调制器

由(8b)、(4)、(3)式得,调制光强分布为

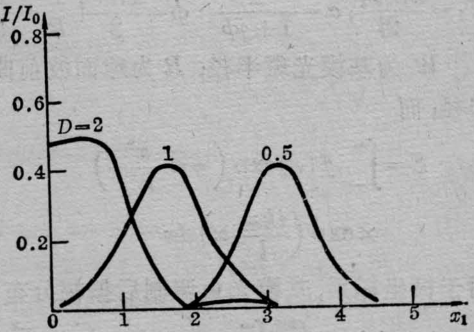
$$I=I_0\exp\left(-\frac{2X_1^2}{1+\phi^2}\right)\left|\frac{e^{i\delta_1}+e^{i\delta_2}}{2}\times\left\{1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\times\exp\left[-\frac{\alpha\pi^2(2n-1)}{4D^2}\right]\times\operatorname{ch}\frac{\pi(2n-1)\alpha X_1}{D}\right\}-e^{i\delta_2}\right|^2 \tag{11}$$

当 $\delta_1=\delta_2=0$ 及 $\delta_1=0$、$\delta_2=j\infty$,即得与文献[1]相同的结果。

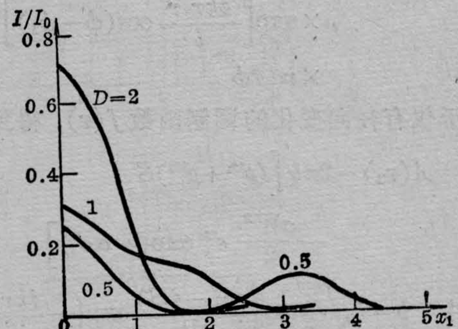
$\delta_1=\delta_2=0$ 时,为矩形相位栅调制器,远区光强分布见图 4(a)。$D=2$ 时,中心光斑近似于方波。

$\delta_1=0$, $\delta_2=j\infty$ 时,为光束中心透明的遮透相间的调制器,光强分布如图 4(b) 所示。D 增加,中心极大值增加。

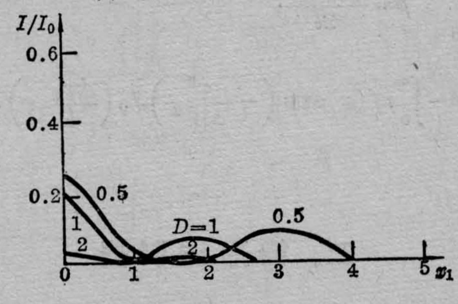
$\delta_1=j\infty$, $\delta_2=0$ 时,为光束中心遮盖的遮透相间的调制器,光强分布见图 4(c),光轴上有极大值。



(a) 相位调制器($\delta_1=\delta_2=0$)



(b) 中心透明($\delta_1=0$, $\delta_2=j\infty$)



(c) 中心遮盖($\delta_1=j\infty$, $\delta_2=0$)

图 4 对称栅形调制器远区光强分布

三、缝形调制器

缝宽为 d 的调制器(图 1(b)), 调制函数 $f(x)=\mathrm{rect}\left(\frac{x}{d}\right)$, (4)式中, 用傅里叶变换表示 $\mathrm{rect}\left(\frac{x}{d}\right)$, 运算得

$$S=2W\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$$
$$\times\int_0^\infty \frac{\xi\sin D\xi\cos DX_1-X_1\cos D\xi\sin DX_1}{\xi^2-X_1^2}$$
$$\times e^{-\alpha\xi^2}d\xi$$

以 $F_c(\xi)$、$K_s(\xi)$ 分别表示 $f(x)$、$K(x)$ 的傅里叶余弦变换式和正弦变换式, 对于

$$F_c(\xi)=e^{-\alpha\xi^2},$$
$$G_c(\xi)=\frac{1}{X_1^2-\xi^2},$$
$$K_s(\xi)=\frac{\xi}{X_1^2-\xi^2},$$

则有
$$f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\frac{-x^2}{4\alpha}},$$
$$g(x)=\frac{1}{X_1}\sin X_1x$$
$$k(x)=-\cos X_1x,$$

用傅里叶变换[3]的卷积运算得到

$$S=\frac{W}{4}\sqrt{\pi\alpha}\,e^{-\frac{D^2}{4\alpha}}\Bigg(\cos DX_1\Bigg\{e^{\left(\frac{D}{2\sqrt{\alpha}}+i\sqrt{\alpha}X_1\right)^2}$$
$$\times\left[\mathrm{erfc}\left(-\frac{D}{2\sqrt{\alpha}}-i\sqrt{\alpha}\,X_1\right)\right.$$
$$\left.-\,\mathrm{erfc}\left(\frac{D}{2\sqrt{\alpha}}+i\sqrt{\alpha}\,X_1\right)\right]$$
$$+e^{\left(\frac{D}{2\sqrt{\alpha}}-i\sqrt{\alpha}X_1\right)^2}$$
$$\times\left[\mathrm{erfc}\left(-\frac{D}{2\sqrt{\alpha}}+iX_1\sqrt{\alpha}\right)\right.$$
$$\left.-\,\mathrm{erfc}\left(\frac{D}{2\sqrt{\alpha}}-i\sqrt{\alpha}\,X_1\right)\right]\Bigg\}$$
$$-i\sin DX_1\Bigg\{e^{\left(\frac{D}{2\sqrt{\alpha}}+i\sqrt{\alpha}X_1\right)^2}$$
$$\times\left[\mathrm{erfc}\left(-\frac{D}{2\sqrt{\alpha}}-i\sqrt{\alpha}\,X_1\right)\right.$$
$$\left.-\,\mathrm{erfc}\left(\frac{D}{2\sqrt{\alpha}}+i\sqrt{\alpha}\,X_1\right)\right]$$
$$+e^{\left(\frac{D}{2\sqrt{\alpha}}-i\sqrt{\alpha}X_1\right)^2}$$
$$\times\left[\mathrm{erfc}\left(\frac{D}{2\sqrt{\alpha}}-i\sqrt{\alpha}\,X_1\right)\right.$$
$$\left.-\,\mathrm{erfc}\left(-\frac{D}{2\sqrt{\alpha}}+i\sqrt{\alpha}\,X_1\right)\right]\Bigg\}\Bigg)\quad(12)$$

式中 $\mathrm{erfc}(z)$ 为误差函数。

由(12)、(3)式得光强分布为

$$I=I_0\left|\frac{(e^{i\delta_1}+e^{i\delta_2})S}{\sqrt{\pi\alpha}W}-e^{i\delta_2}\exp(-\alpha X_1^2)\right|^2\quad(13)$$

上式当 $\delta_1=\delta_2=0$ 时为缝形相位调制器, $\delta_1=j\infty$, $\delta_2=0$ 时, 为宽 d 的薄遮盖条的衍射光强分布。

当 $\delta_1=0$, $\delta_2=j\infty$ 则为高斯光束单缝衍射, 如 D 较小, X_1 较大时, 则

$$\mathrm{erfc}(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,z}e^{-z^2},$$

于是远区光强分布为

$$I=\frac{2d^2}{\lambda^2l^2}\left(\frac{\sin DX_1}{DX_1}\right)^2,$$

与平面波的单缝衍射远区场强分布一致。

四、孔形调制器

半径为 a 的孔形调制器(图 1(c)), 调制函数 $f(r)=\mathrm{circ}\left(\frac{r}{a}\right)$, 用汉格尔变换式 $f(r)=\int_0^\infty aJ_1(\xi a)J_0(\xi r)d\xi$ 代入(7)式得

$$S=\frac{a^2}{2}\exp(-\alpha\rho^2)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(\alpha\rho^2)^m$$
$$\times{}_1F_1\left(m+1,\ 2,\ -\frac{A}{\alpha}\right)$$

式中 $\rho=\frac{KWr_1}{2l}$, ${}_1F_1(a,\ b,\ z)$ 为合流超几何函数[4] $A=\left(\frac{a}{W}\right)^2$, 由(6)式得光强分布

$$I=I_0\exp\left(-\frac{2\rho^2}{1+\phi^2}\right)$$
$$\times\left|\frac{A(e^{i\delta_1}+e^{i\delta_2})}{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(\alpha\rho^2)^m\right.$$
$$\left.\times{}_1F_1\left(m+1,\ 2,\ -\frac{A}{\alpha}\right)-e^{i\delta_2}\right|^2 \quad (14)$$

当 $\delta_1=\delta_2=0$ 时，为孔形相位调制器，由

$${}_1F_1(1,\ 2,\ 2z)=\frac{e^z}{z}\operatorname{sh}z$$

得到 $I=I_0\exp\left(-\dfrac{2\rho^2}{1+\phi^2}\right)$

$$\times\left|1-e^{-\frac{A}{\alpha}}+\frac{2A}{\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}(\alpha\rho^2)^m\right.$$
$$\left.\times{}_1F_1\left(m+1,\ 2,\ -\frac{A}{\alpha}\right)\right|^2 \quad (15)$$

当m足够大时，

$${}_1F_1\left(m+1,\ 2,\ -\frac{A}{\alpha}\right)$$
$$=e^{-\frac{A}{2\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{mA}}J_1\left(2\sqrt{\frac{mA}{\alpha}}\right)。$$

(15)得到远区光强分布(图5)，当 $A=1.44$ 时，可以得到近似矩形的分布。

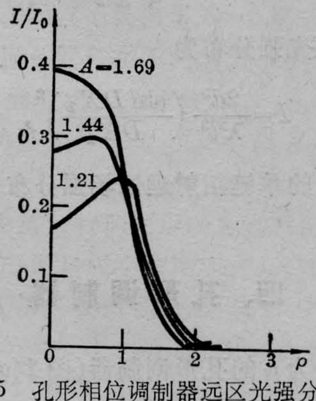


图5 孔形相位调制器远区光强分布

(15)式求得沿光轴的分布为

$$I=\frac{A_0}{1+Z}(1+4e^{-2A}-4e^{-A}\cos A\phi) \quad (16)$$

式中 A_0 为调制器中心光强；$Z=\dfrac{2l}{KW^2}$；$A\phi=\dfrac{\pi a^2}{\lambda l}$，它沿轴向成 $\cos A\phi$ 变化(图6)，在近区沿轴向分布幅度变化大，并与A有关，A值大时，变化幅度小。

(14)式中，当 $\delta_1=0$，$\delta_2=j\infty$ 可得到高斯光束的圆孔衍射强度分布；当 $\delta_1=j\infty$，

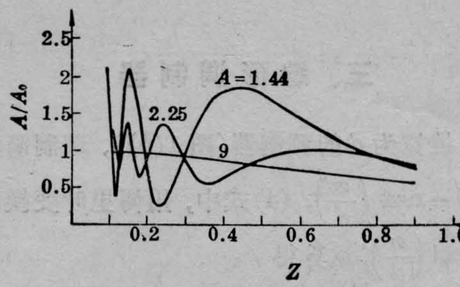


图6 孔形相位调制器沿光轴的强度分布

$\delta_2=0$，则得圆遮屏的衍射强度分布。上述两种衍射远区分布的中心均有极大值。

五、扇形调制器

如图1(d)所示，扇形调制器调制函数

$$f(\phi)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$
$$\times\cos[l(2n-1)\phi]$$

代入(5)式得

$$A=b\left[4(e^{i\delta_1}+e^{i\delta_2})S\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha\pi W^2}{2}(e^{i\delta_1}-e^{i\delta_2})\exp(-\alpha\rho^2)\right] \quad (17)$$

式中

$$S=\frac{\alpha W^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$
$$\times\cos[l(2n-1)\phi]i^{l(2n-1)}(\alpha\rho^2)^{l\left(n-\frac{1}{2}\right)}$$
$$\times\frac{\Gamma\left[l\left(n-\frac{1}{2}\right)+1\right]}{\Gamma[l(2n-1)+1]}$$
$$\times{}_1F_1\left[l\left(n-\frac{1}{2}\right)+1,\ l(2n-1)\right.$$
$$\left.+1,\ \alpha\rho^2\right]$$

由(17)可得

$$I=I_0\left|(e^{i\delta_1}+e^{i\delta_2})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{\pi(2n-1)}\right.$$
$$\times\cos[l(2n-1)\phi]i^{l(2n-1)}(\alpha\rho^2)^{l\left(n-\frac{1}{2}\right)}$$
$$\times\frac{\Gamma\left[l\left(n-\frac{1}{2}\right)+1\right]}{\Gamma[l(2n-1)+1]}$$
$$\times{}_1F_1\left[l\left(n-\frac{1}{2}\right)+1,l(2n-1)+1,\alpha\rho^2\right]$$
$$\left.+\frac{e^{i\delta_1}-e^{i\delta_2}}{2}\exp(-\alpha\rho^2)\right|^2 \quad (18)$$

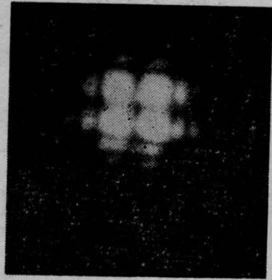
当 $\delta_1=\delta_2=0$ 时，得到与文献相同的表达式[1]，在 $\alpha=1$ 的远区，光强分布为对称的旁瓣，中心强度为零。

六、实验结果

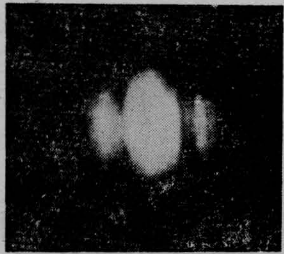
我们用氦-氖激光器做了两种相位调制器的调制实验，一种为两维反对称栅形相位调制器；一种为对称栅形相位调制器。调制器是用在平面玻璃上蒸镀不同厚度的铝膜完成的，镜面上铝膜厚度差为 $\frac{\lambda}{4}$，以满足相位调制器 $\delta_1=\delta_2=0$。基模氦-氖光束经该镜反射，则受到空间调制，我们在透镜的焦点处观察调制场分布，图7为实验照片，图7(a)为基模光束经 $D=1.5$ 两维反对称栅形相位调制器(网形)的远区分布，它有四个主旁瓣，图7(b)为经对称栅形相位调制器 $D=2$ 的远区光强分布，它的主瓣近似为矩形，照片中出现的旁瓣不对称性是由 δ_2 不为零产生的。

比较图2(a)、图4(a)及图7看出，实验与理论是符合得比较好的。

实验表明，空间相位调制器作为激光束的对称分束器是方便的，象图7(a)那样的调制光束，用它作自动准直是可行的，相位调制器也用于在那些远区光强需要均匀的场合。



(a) 两维反对称栅形相位调制器
($D=1.5$)



(b) 对称栅形相位调制器
($D=2$)

图7　氦-氖光束空间调制场远区分布照片

参考文献

[1] L. W. Casperson; *Opt. Quant. Electr.*, 1978, **10**, 483.

[2] J. W. 顾德门，“傅里叶光学导论”科学出版社 1976。

[3] A.Erdelyi; Tables of Integral Transforms, 1954.

[4] M. Abramouitz; Hand book of Mathematical Functions. Wash. US GPO, 1964.