

# 离轴球面波的传输性质和非稳定腔模的二维稳定性问题

朱 如 曾

(中国科学院力学研究所)

**提要:** 本文提出对离轴点光束及其传输性质的矩阵描述方法, 导出光束参数变换关系, 把轴点光束情况下的  $ABCD$  定律推广到离轴情况。以二维稳定性观点严格地讨论了非稳定腔光线模的稳定性问题, 证明会聚光束不稳定, 发散光束才稳定。

## Transmission properties of off-axis spherical waves and two dimensional stability of unstable cavity modes

*Zhu Ruzeng*

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

**Abstract:** Matrix methods are provided for describing the off-axis spherical waves and their transmission properties. The  $ABCD$  law for on-axis spherical waves are shown to be also applicable for off-axis ones. The stability of the unstable cavity modes are discussed from the point of view of two dimensional stability. It is proved that the convergent wave is unstable and the divergent wave is stable.

### 一、引 言

非稳定腔中存在会聚球面波(或称会聚点光束)和发散球面波(或称发散点光束), 其发光中心在腔轴上。Siegman<sup>[1]</sup>指出, 当球面波的虚中心在腔轴上发生小变动时, 发散波稳定, 会聚波不稳定。张贵芬<sup>[2]</sup>证明了Siegman的结论。

[1] 和 [2] 的观点可称为一维稳定性观点, 因为球面波的中心只允许作一维变动。实际上, 球面波的中心也可以离开腔轴, 因此其变化域应该是二维的。所以腔模中心的稳定性问题应是二维稳定性问题。一维稳定仅

是二维稳定的必要条件, 尚不充分。所以本文将进一步讨论腔模的二维稳定性问题。

为此, 必须讨论离轴光束的描写方法及其传输性质。而这本身也是具有独特意义的问题。尤其是我们提出了离轴光束的向量表示法及“光束变换矩阵”的新概念。

### 二、离轴球面波的传输性质

我们讨论轴对称光学系统。选定参考平面, 则光线可用  $(x, \theta)$  来描写,  $x$  和  $\theta$  具有通常意义。在旁轴近似下, 光学系统对光线的变换可用传输矩阵

收稿日期: 1980年7月22日。

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

来描写:

$$\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \theta^{(1)} \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x^{(0)} \\ \theta^{(0)} \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中,  $(x^{(0)}, \theta^{(0)})$  和  $(x^{(1)}, \theta^{(1)})$  分别为输入和输出光线。

为了讨论光腔的二维稳定性, 必须允许球面波的中心离轴。我们必须讨论离轴光束的传输行为。首先对离轴光束给出合适的描写。容易看出, 满足如下线性关系的光线构成一个离轴(或特殊情况下不离轴)点光束或平行光束:

$$ax + b\theta + e = 0, \quad (2)$$

其中,  $a, b, e$  为实常数,  $a$  和  $b$  不能同时为零。所以向量  $(a, b, e)$  描写一点光束或一平行光束, 其物理意义如下:

若  $a \neq 0$ , 则  $(a, b, e)$  表示一点光束, 其曲率半径为

$$R = -\frac{b}{a}, \quad (3)$$

其中心的  $x$  坐标为(即离轴的距离)

$$x_0 = -\frac{e}{a}. \quad (4)$$

若  $a \neq 0$ , 但  $b = 0$ , 则  $R = 0$ , 表示中心在参考平面上。

若  $a = 0$ , 但  $b \neq 0$ , 则表示一平行光束, 它与腔轴的夹角为

$$\theta_0 = -\frac{e}{b}. \quad (5)$$

附录 I 中已证明, 光线变换矩阵为  $H$  的光学系统对光束  $(a, b, e)$  的变换关系为

$$\begin{bmatrix} a^{(1)} \\ b^{(1)} \\ e^{(1)} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} a^{(0)} \\ b^{(0)} \\ e^{(0)} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

式中,  $M$  可称为“光束变换矩阵”, 由下式表示:

$$M = \begin{bmatrix} D & -C & 0 \\ -B & A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

上标(1)和(0)分别表示输出和输入。从(6)、(7)、(3)和(4)式得到球面波曲率半径  $R$  和中心的  $x$  方向坐标  $x_0$  的变换关系如下:

$$R^{(1)} = \frac{AR^{(0)} + B}{CR^{(0)} + D}, \quad (8)$$

$$x_0^{(1)} = \frac{x_0^{(0)}}{D + CR^{(0)}}. \quad (9)$$

(8)和(9)式就是离轴球面波的传输性质。从(8)式可见,  $R$  的变换关系就是轴点光束的  $ABCD$  定律<sup>[3]</sup>, 它与  $x_0$  无关。

### 三、非稳定腔模的几何光学近似解

从(2)可见,  $[a, b, e]$  和  $[\lambda a, \lambda b, \lambda e]$  代表同一点光束。所以, 在往返矩阵为  $H$  的光腔中,  $[a, b, e]$  是模, 其充分必要条件是它满足如下方程:

$$M \begin{bmatrix} a \\ b \\ e \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ e \end{bmatrix}, \quad (10)$$

式中,  $\lambda$  为非零实数。要求  $a$  和  $b$  不同时为零, 其充分必要条件是,  $\lambda$  同时满足如下两个方程式:

$$\begin{vmatrix} D - \lambda & -C & 0 \\ -B & A - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

和

$$\begin{vmatrix} D - \lambda & -C \\ -B & A - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

联立(11)和(12)解得

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{A+D}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(A+D)^2 - 4}, \\ \lambda_2 &= \frac{A+D}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(A+D)^2 - 4}. \end{aligned} \quad (13)$$

因为对非稳定腔(不考虑稳定区的边界各点), 有<sup>[4]</sup>

$$|A+D| > 2,$$

并考虑到  $H$  的行列式为 1, 故

$$|\lambda| \neq 1. \quad (14)$$

解(10),并考虑到(14),得  $M$  的特征向量  $(a, b, e)$  为:

若  $C \neq 0$ , 则

$$b = \frac{D - \lambda_{1,2}}{C} a, \quad e = 0, \quad (15)$$

代入(3)和(4)得

$$\begin{aligned} R_{1,2} &= \frac{\lambda_{1,2} - D}{C} \\ &= \frac{A - D}{2C} \pm \frac{1}{2C} \sqrt{(A + D)^2 - 4}, \\ x_0 &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

这是发光中心位于腔轴上的两个点光束。其中一个,  $|\lambda| > 1$ , 是发散光束, 另一个,  $|\lambda| < 1$ , 是会聚光束。

若  $C = 0$ , 则  $\lambda_1 = A, \lambda_2 = D$ , 故有:

对  $\lambda_1$

$$a = e = 0, \quad b = \text{任意非零实数}, \quad (17)$$

从(5)式得

$$\theta_0 = 0. \quad (18)$$

这表示一个沿腔轴方向传播的平行光束, 若  $|A| > 1$ , 则是发散的; 若  $|A| < 1$ , 是会聚的。望远镜式腔即属此种情况。

对  $\lambda_2$ , 有

$$b = \frac{B}{A - D} a, \quad e = 0, \quad (19)$$

从(3)和(4)式得

$$R = \frac{B}{D - A}, \quad x_0 = 0. \quad (20)$$

这是发光中心位于腔轴上的点光束, 若  $|D| > 1$ , 则发散, 若  $|D| < 1$ , 则会聚。

#### 四、二维稳定性

由上节可知, 除去  $C = 0$  时与  $\lambda_1$  相对应的模是平行光束外, 其余模式都是发光点位于腔轴上的点光束。本节将针对后一情况讨论稳定性问题, 到本节末尾将说明如何把  $C = 0$  中  $\lambda_1$  所对应的平行光束也包括进去。

虽然模式的发光点都位于腔轴上, 即  $x_0 = 0$ , 但当讨论稳定性问题时, 应考虑到

$x_0$  可以变化为不等于零。发光中心用  $(R, x_0)$  来描写, 其中  $R$  和  $x_0$  均可变, 因而是二维变化的。 $(R, x_0)$  在一次往返后的变换法则则是(8)和(9), 而  $(R, x_0)$  的自洽解又是(16)和(20)。现在使光束中心从自洽位置  $(R, 0)$  出发, 作小位移  $[(\delta R)^{(0)}, (\delta x_0)^{(0)}]$ 。微分(8)和(9), 即得一次往返后的象点位移

$$\begin{aligned} (\delta R)^{(1)} &= (CR + D)^{-2} (\delta R)^{(0)} \quad (21) \\ (\delta x_0)^{(1)} &= (CR + D)^{-1} (\delta x_0)^{(0)} \\ &\quad - Cx_0^{(0)} (D + RC)^{-2} (\delta R)^{(0)}. \end{aligned}$$

因为  $x_0^{(0)} = 0$ , 所以

$$(\delta x_0)^{(1)} = (CR + D)^{-1} (\delta x_0)^{(0)}. \quad (22)$$

得到(21)时, 已用  $H$  的行列式为1的条件。将(16)式(当  $C \neq 0$ )和(20)式(当  $C = 0$ )代入(21)和(22)式得

$$(\delta R)^{(1)} = \lambda^{-2} (\delta R)^{(0)} \quad (23)$$

$$(\delta x_0)^{(1)} = \lambda^{-1} (\delta x_0)^{(0)}. \quad (24)$$

从(23)和(24)可见, 对发散光束,  $|\lambda| > 1$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\delta R)^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{-2n} (\delta R)^{(0)} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\delta x_0)^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{-n} (\delta x_0)^{(0)} = 0,$$

模是稳定的。可以定义纵向稳定因子(与[2]一样)

$$\frac{(\delta R)^{(1)}}{(\delta R)^{(0)}} = \lambda^{-2}, \quad (25)$$

和横向稳定因子

$$\frac{(\delta x_0)^{(1)}}{(\delta x_0)^{(0)}} = \lambda^{-1}. \quad (26)$$

可见, 纵向收敛比横向快。对会聚光束,  $|\lambda| < 1$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\delta R)^{(n)} = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\delta x_0)^{(n)} = \infty,$$

故模不稳定, 而且  $\lambda$  越小, 越不稳定。

现在我们考虑, 如何判定(18)所表示的平行光束的稳定性问题。

为了利用点光束稳定性的已有判据, 我们取一任意的满秩矩阵  $T$ , 把光腔的光线往返矩阵  $H$  改写成

$$H = HTT^{-1}.$$



然后,将原参考平面  $P$  想象地移到  $T$  和  $T^{-1}$  之间,即  $P_I$ 。以  $P_I$  而论,光线往返矩阵为

$$H_1 = T^{-1}HT = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}。$$

适当选择  $T$ , 一定能使  $C_1 \neq 0$ 。因此,由上节可知,在  $P_I$  上,模一定是点光束。记  $H_1$  的本征值为  $\lambda_{H_1}$ , 所以当  $|\lambda_{H_1}| > 1$  时,模稳定,当  $|\lambda_{H_1}| < 1$  时,模不稳定。显然,模稳定与否,与参考平面无关。所以,只要  $|\lambda_{H_1}| > 1$ , 则在任何参考平面上,模都稳定,反之亦然。另一方面,附录 II 中已证明,模所对应的本征值也与参考平面无关。所以,在原先的参考平面上,往返矩阵  $H$  的本征值决定模的稳定性:  $|\lambda| > 1$  时,稳定;  $|\lambda| < 1$  时,不稳定。应用于  $C=0$  的情况可知,对发散光束,  $|A| > 1$ , 稳定; 对会聚光束,  $|A| < 1$ , 不稳定。

事实上,由于镜面的有限口径,会聚波不能满足强度自再现条件,故本来就不是严格的模。

### 附录 I 光束变换矩阵 $M$ 的推导

设光学系统的光线变换矩阵为

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (\text{I.1})$$

则  
即

$$\begin{bmatrix} x' \\ \theta' \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ \theta' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix}。 \quad (\text{I.2})$$

变换后的光束的方程为

$$a'x' + b'\theta' + e' = 0,$$

即

$$[a', b', e'] \begin{bmatrix} x' \\ \theta' \\ 1 \end{bmatrix} = 0。 \quad (\text{I.3})$$

变换前的光束方程为

$$[a, b, e] \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix} = 0。 \quad (\text{I.4})$$

将(I.2)代入(I.3)得

$$[a', b', e'] \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix} = 0。 \quad (\text{I.5})$$

因为(I.4)和(I.5)表示  $x-\theta$  平面上同一直线,故

$$[a, b, e] = k[a', b', e'] \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

为固定起见,取  $k=1$ , 得

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ e' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} a \\ b \\ e \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} H^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ e \end{bmatrix}。$$

得到

$$M = \begin{bmatrix} H^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & -C & 0 \\ -B & A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。 \quad (\text{I.6})$$

### 附录 II 模所对应的本征值与参考平面无关的证明

设以参考平面  $P$  和  $P_I$  而证,光腔的光线往返矩阵分别为  $H$  和  $H_1$ , 则

$$H_1 = T^{-1}HT,$$

其中,  $T$  必满秩。相应地,光束往返矩阵为

$$M_1 = \begin{bmatrix} H_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{-1}H^{-1}T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = T^{-1}MT^{-1}, \quad (\text{II.1})$$

式中,

$$T = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

设模在  $P$  和  $P_I$  上的表示分别为  $(a, b, e)$  和  $(a_1, b_1, e_1)$ 。其间关系为

$$T^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ e_1 \end{bmatrix}。 \quad (\text{II.2})$$

设  $(a_1, b_1, e_1)$  的本征值为  $\lambda$ , 即

$$M_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ e_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ e_1 \end{bmatrix}。 \quad (\text{II.3})$$

将(II.1)和(II.2)代入上式,并化简,即得

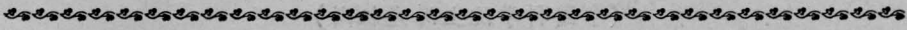
$$M \begin{bmatrix} a \\ b \\ e \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ e \end{bmatrix},$$

可见,  $[a, b, e]$  的本征值也是  $\lambda$ 。这表示模的本征值与参考平面选择无关。

感谢谈镐生教授和卞荫贵教授的指导和帮助。

## 参 考 文 献

- [1] A. E. Siegman; *Proc. IEEE*, 1965, **53**, No. 2, 277.
- [2] 张贵芬;《激光》, 1980, **7**, No.3, 18.
- [3] H. Kogelnik; *Bell Syst. Tech. J.*, 1965, **44** 455.
- [4] 朱如曾, 封开印编译, 谈镐生审校;《激光物理》, 国防工业出版社, 1974年, 第五章。



## 江苏省激光研究所研制成 500 瓦封离型 CO<sub>2</sub> 激光器

江苏省激光研究所研制成功了 500 瓦级 CO<sub>2</sub> 激光器, 可用于各种难熔合金材料及一般金属板材的切割和薄板材的焊接等。

考虑到器件的性能指标和技术经济效果, 该器件采用了并列式结构, 改革了传统使用的同轴式结构, 具有性能良好、成本低廉、使用可靠、维修方便、输出功率大等优点, 在冷却系统、密封工艺等方面还有独到之处, 可供其他类型的气体激光器参考借鉴。

该器件可在单模或多模状态下工作, 最大输出功率 580 瓦, 稳定运行功率 540 瓦, 每小时功率波动  $< \pm 4\%$ , 光电转换效率为 12%。该器件还附有充气源, 可多次充气, 原则上寿命无限期, 一次充气寿命为 250 小时以上。

该器件最近已通过技术鉴定, 并准备在年内向有关单位提供若干台样机试用。

(许士伟)

## 大功率 CO<sub>2</sub> 激光治疗仪通过技术鉴定

江苏省激光研究所和南通医学院附属医院在复旦大学等单位的协助下, 于 1977 年研制成 N 型三折 CO<sub>2</sub> 激光治疗仪, 并于 1981 年 4 月下旬在江苏省南通市召开了技术鉴定会。

该仪器由放电总长 6 米、放电管内径 28 毫米的 N 型三折激光管、激光电源、真空系统、光路转换、导光系统、同光路指示、功率监视、水控与缺水保护、吸气与吸气装置等部分组成, 输出功率在 10~200 瓦内可调。

三年多来, 用该治疗仪共治疗了恶性肿瘤、癌前期病变、良性肿瘤等体表患疾 260 余例。临床实践表明, CO<sub>2</sub> 激光对良性肿瘤疗效显著, 对恶性肿瘤的有效率也可达 86% 左右, 深受医护人员和患者的欢迎。

与会代表肯定了该仪器设计合理, 功率可调, 操作灵活, 安全可靠等特点, 并对今后的小型化、多功能等提出了合理建议。

(吉禾)