

计算机全息术在非球面检验中的应用

胡宏章 贺顺忠

(天津大学精密系)

提要: 本文根据 Lohmann 关于计算机全息术的一般理论阐明了干涉条纹型计算机全息图的原理; 对 Sirohi 等人的计算方法进行了改进, 提高了计算精度, 而计算时间略有缩短; 还制成了一个用于检验抛物面镜 ($f=1021$ 毫米、 $2r_0=214$ 毫米) 的计算机全息图, 再现波面的精度 (方均根误差) 达到 $1/20$ 波长, 并且已将此计算机全息图用于抛物面镜的检验, 显示出了被验元件的面形缺陷。

Application of computer-generated holograms to aspheric surface testing

Hu Hongzhang He Shunzhong

(Department of Precision Instruments, Tianjin University)

Abstract: According to Lohmann's general theory on computer-holography, the principle of the computer-generated hologram of interference-fringe type is explained. An improvement upon the calculation procedure of Sirohi *et al.* has been made. It raises the accuracy and reduces the required time a little. A prototype hologram that reconstructs the required wavefront with an accuracy of $1/20$ wavelength (rms. error) has been produced for testing a parabolic mirror ($f=1021$ mm, $2r_0=214$ mm), which shows the defects of the tested element.

理论分析

计算机全息术^[1]由于它具有独特优点, 即能够再现出原先并不存在的具有预定数学形式的标准波面, 很快地就被应用于光学元件的检验, 特别是非球面的检验。

考察图 1, 它与 Abbe 在阐明显微镜相干成象理论时的情形相似。我们也采用 Abbe 的方法, 先从全息图平面过渡到物镜的后焦点(频率平面), 再从后焦点过渡到象平面。

干涉条纹型计算机全息图是由一些宽度为 a 的曲线组成的, 设第 m 条曲线用方程

$$x = \chi_m(y)$$

表示, 并设该曲线在 y 方向的跨度为 $2y_m$, 则全息图的透射函数可以表示为:

$$h(x, y) = \sum_m \text{rect}\left(\frac{x - \chi_m(y)}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{2y_m}\right) \quad (1)$$

不难求出它的傅里叶变换为:

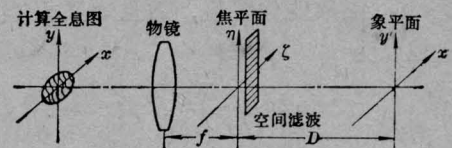


图 1 计算机全息图再现时的空间滤波

收稿日期: 1980年7月2日。

$$H(p, q) = a \operatorname{sinc}(pa) \sum_m \int_{-y_m}^{y_m} \exp[-i2\pi(p\chi_m(y) + qy)] dy \quad (2)$$

式中 $\operatorname{sinc} \alpha = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha}$ 。于是物镜后焦面上的光扰动可以表示为:

$$U(\xi, \eta) = c_1 H(\xi/\lambda f, \eta/\lambda f) \\ = c_1 a \operatorname{sinc} \left(\frac{\xi a}{\lambda f} \right) \sum_m \int_{-y_m}^{y_m} \exp[-i \frac{2\pi}{\lambda f} (\xi \chi_m(y) + \eta y)] dy \quad (3)$$

式中 c_1 是常数。

由于从后焦面到象平面的距离 D 远远大于空间滤波器开孔的尺寸, 所以仍然可以按夫琅和费衍射公式求出象平面上的光扰动为:

$$V(x', y') = c_2 \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi, \eta) U(\xi, \eta) \exp \times [-i \frac{2\pi}{\lambda D} (x'\xi, y'\eta)] d\xi d\eta \quad (4)$$

式中 $S(\xi, \eta)$ 是空间滤波函数, 它是这样选择的, 使得在 ξ 方向上的第一级衍射波能够透过。设全息图上的曲线沿 x 轴方向的平均间距为 δx , 那么后焦面上相邻衍射级之间的距离为 $\Delta\xi = \lambda f / \delta x$, 因此空间滤波函数为:

$$S(\xi, \eta) = \operatorname{rect} \left(\frac{\xi - \Delta\xi}{\Delta\xi} \right) \quad (5)$$

将式(3)、(5)代入式(4), 并引入物镜的放大率 $\beta = -D/f$, 可以得到:

$$V(x', y') = c_1 c_2 a \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\Delta\xi}{2}}^{\frac{\Delta\xi}{2}} \operatorname{sinc} \left(\frac{\xi a}{\lambda f} \right) \times \int_{-y_m}^{y_m} \exp \left\{ -i \frac{2\pi}{\lambda f} [\eta(y - y'/\beta) + \xi(\chi_m(y) - x'/\beta)] \right\} dy d\xi d\eta$$

由于 sinc 函数变化缓慢, 而且 a 又相当小, 近似地认为

$$\operatorname{sinc} \left(\frac{\xi a}{\lambda f} \right) \approx \text{常数}$$

$$\text{当 } \frac{3}{2} \Delta\xi \geq \xi \geq \frac{1}{2} \Delta\xi$$

并调换对变数 y 与 η 的积分顺序, 积分得到

$$V(x', y') = c_3 \exp \left(-i2\pi \frac{\Delta\xi}{\lambda f \beta} x' \right) \sum_m \int_{-y_m}^{y_m} \times \delta \left(y - \frac{y'}{\beta} \right) \operatorname{sinc} \left[\frac{\Delta\xi}{\lambda f} \left(\chi_m(y) - \frac{x'}{\beta} \right) \right] \times \exp \left[-i \frac{2\pi \Delta\xi}{\lambda f} \chi_m(y) \right] dy \quad (6)$$

式中常数 c_3 已包括 c_1, c_2 在内。现在选择

$$\chi_m(y) = \frac{1}{b} [-\phi(\chi_m(y), y) + m] \quad (7)$$

式中

$$b = \Delta\xi / \lambda f \quad (7a)$$

那么从式(6)积分得到

$$V(x', y') = c_3 \exp \left(-i2\pi b \frac{x'}{\beta} \right) \sum_m \times \operatorname{sinc} \left[b \left(\chi_m \left(\frac{y'}{\beta} \right) - \frac{x'}{\beta} \right) \right] \times \exp \left[i2\pi \phi \left(\chi_m \left(\frac{y'}{\beta} \right), \frac{y'}{\beta} \right) \right] \quad (8)$$

从式(7)可见, 当 b 值足够大时, 与不同的 m 值对应的 $\chi_m(y)$ 值几乎是等间隔地紧密排列的, m 的值也可以认为趋于 ∞ , 于是根据 Whittaker-Shannon 抽样定理^[2], 从式(8)得到

$$V(x', y') = c_3 \exp \left(-i2\pi b \frac{x'}{\beta} \right) \times \exp \left[i2\pi \phi \left(\frac{x'}{\beta}, \frac{y'}{\beta} \right) \right] \quad (9)$$

式中的指数函数 $\exp \left(-i2\pi b \frac{x'}{\beta} \right)$ 只不过表示波面偏离了原来的方向, 常数 β 表示整个波面按比例地放大。所以式(9)表明, 从干涉条纹型计算机全息图衍射的光波经过适当的空间滤波以后确能得到所要求的波面, 而全息图中的诸曲线是由方程(7)决定的。

然而, 如果波面的曲率过大, 相邻曲线之间的间隔变化很大, Whittaker-Shannon 抽样定理所要求的条件不能满足, 带来的误差就不能忽视。就普遍的情形用解析的方法定量地讨论这个误差是很困难的。但是针对具体的例子用数值计算的方法可以估算出误差^[3]。

实 验

1. 干涉条纹型计算机全息图的制作

如何根据方程(7)画出曲线来? Birch^[4]

的方法是在 x 轴方向以 0.2 毫米的间隔(约为绘图仪画出的线宽)、在 y 轴方向以 0.4 毫米的间隔取样,对每一取样点算出干涉级。如果干涉级在 $(m \pm 0.1)$ 范围内,就把 y 坐标储藏起来。然后逐个检查这些被储藏的点,以决定它们是孤立的一个点呢还是一串具有相同干涉级的点的始端或末端。绘图仪的笔沿着 y 轴方向来回移动,按照储藏的坐标画出点或线段。为了保证精度,在每两条曲线之间要取样十个以上的点。所以计算和作图的时间是很长的。Sirohi 等^[5]对 Birch 的方法进行了改进。他们在 x 方向以稍小于最小曲线间隔的周期进行取样,这样就保证了两条曲线之间至少有一个取样点。算出在这些取样点的干涉级,一般说来,它不是整数,设小数部分是 ϵ 。再计算出在取样点处的曲线间隔 $d(x_n, y_n)$,利用下面的修正公式求出具有整数干涉级的坐标:

$$x'_n = x_n - \epsilon d(x_n, y_n) \quad (10)$$

Sirohi 的方法虽然保证了每两条曲线之间至少有一个取样点,不至于漏画曲线。但是取样点是按相等的间隔预先确定的,因此,有时取样点离曲线很远,用公式(10)修正时会带来较大的误差。因为这个修正公式只有当 ϵ 很小时才有较高的精度。在我们的方法中,沿 x 轴的取样间隔不是固定的,一旦算出了某一条曲线上的点的坐标 (x_n, y_n) 以后,就可以算出在该点的曲线间隔 d_n ,下一条曲线的坐标就取作 $(x_n + d_n, y_n)$,这样就保证了取样点总是落在下一条曲线的附近,再用公式(10)修正,精度就很高。另外,取样点的数目也比 Sirohi 略少,相应地节省了计算时间。在 y 方向,我们的取样间隔约为曲线在 x 方向平均间隔的 3~5 倍。虽然取样很稀,由于采

用了样条函数拟合的方法,画出的曲线平滑地通过诸取样点,达到了很高的精度。

我们制作的计算机全息图是用于检验抛物面镜的,所要求的标准光波的位相分布表示为:

$$\phi(\rho) = 2B_4\rho^4 + 2B_6\rho^6 \quad (11)$$

式中 ρ 是相对半径。常数 B_4 、 B_6 为:

$$B_4 = \frac{r_0^4}{8R^3\lambda}, \quad B_6 = \frac{r_0^6}{16R^5\lambda} \quad (11a)$$

其中 R 是抛物面镜顶点处的曲率半径, $2r_0$ 是抛物面镜的口径, λ 是光波的波长。将被验抛物面镜的数据 ($R=2042$ 毫米, $2r_0=214$ 毫米)代入上式算出

$$B_4 = 6.059, \quad B_6 = 0.0166$$

为了减少曲线的数目,必须减小波面的曲率。为此在 $\phi(\rho)$ 中加进一项离焦项 $D_0\rho^2$, $\phi(\rho)$ 变成:

$$\phi(\rho) = D_0\rho^2 + 2A_4\rho^4 + 2A_6\rho^6 \quad (12)$$

D_0 应该这样选择,使得 $\left| \frac{\partial\phi}{\partial x} \right|_{\max}$ 有最小值。根据这个条件求出 $D_0 = -9.089$, 于是便可以算出 $b \geq 18$ 。我们选择 $b = 21$, 曲线总数只有 42 条。

计算是在 IRIS-60 计算机上进行的,所用时间为 50 秒。画图是在 Benson-122 绘图仪上完成的,所用时间为 4 分。

将画成的图形缩小到预定的大小,就制成计算机全息图。图 2 是我们制成的计算机全息图的照片,原图直径为 2.2 毫米。

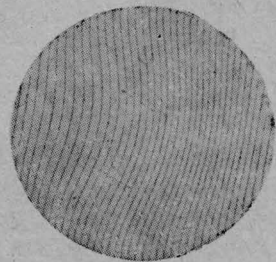


图 2 干涉条纹型计算机全息图的照片

2. 再现波面的精度

为了检验再现波面的精度,让再现光波与平面波干涉。图 3 是所得到的干涉图的照片

片。在图4中将理想的波面形状与按照图3测得的再现波面的形状进行了比较。图中实线代表理想波面，圆圈代表从图3测得的再现波面的位置。所有偏差均小于1/10波长，方均根误差小于1/20波长。



图3 再现光波与平面波的干涉图

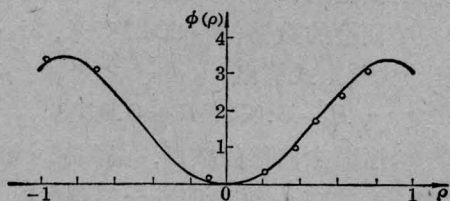


图4 再现波面与理想波面的比较

(纵轴单位: 波长)

3. 抛物面镜的检验

我们是在改装的 Twyman 干涉仪上进行的, 光路如图5所示。

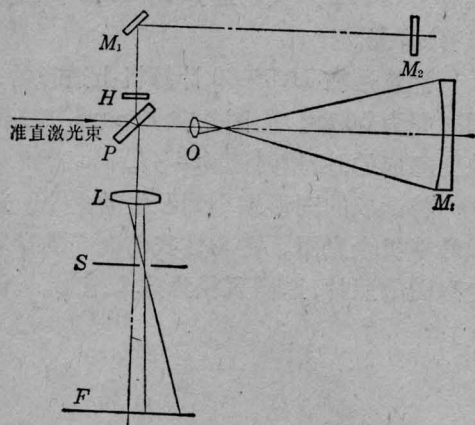


图5 检验抛物面镜的光路图

P —分束镜; O —显微物镜; M_1 —被验抛物面镜;
 H —计算机全息图; M_1 、 M_2 —平面镜; L —物镜;
 S —空间滤波器; F —照相底片

被验抛物面镜 M_1 经显微物镜 O 所成的象要与计算机全息图 H 重合。由于我们所用的显微物镜的焦距只有 22 毫米, 如果把全息图放在分束镜 P 与物镜 L 之间, 是很难满

足这个要求的。因此我们把计算机全息图放在分束镜 P 与平面镜 M_1 之间。这样只有一束光波通过全息片, 如果全息片基底的光学厚度不均匀, 会引起误差。但由于全息图的直径只有 2.2 毫米, 干涉检验的结果表明, 在这样小的范围内可以认为全息片的基底是均匀的。光束通过全息片两次, 可利用的能量很弱, 但由于被验镜面是未镀铝的, 两束相干光的能量还是匹配的。另外, 为了避免从全息片反射的光的干扰, 让全息片稍微偏离铅直位置, 以便利用空间滤波器把这部分杂光滤除。

由全息片再现的标准光波与从被测件反射回来的光波产生干涉, 干涉图如图6所示。由于再现的标准光波的偏差小于1/10波长, 所以干涉场中条纹的弯曲是被测件的面形误差造成的。这跟通常用球面样板检验球面元件的情形一样, 根据条纹形状即可判断面形缺陷。



图6 抛物面镜的干涉检验图

本文方法也可用于其他非球面的检验。

我们在编制计算程序时, 胜利油田规划设计院林长升同志曾提供有益的意见; 在实验工作中也得到了南京天文仪器厂李德培同志的协助, 谨向他们致谢。

参 考 文 献

- [1] A. W. Lohmann, D. P. Paris; *Appl. Opt.*, 1967, No. 10, 1739.
- [2] 顾德门著, 詹达三等译; 《傅里叶光学导论》, 科学出版社出版, 1976, p 23.
- [3] A. F. Fercher; *Optica Acta*, 1976, 23, No. 5, 347.
- [4] K. G. Birch, Frances J. Green; *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1972, 5, No. 9, 1982.
- [5] R. S. Sirohi et al.; *Optica Acta*, 1976, 23, No. 5, 347.