一种校正三级球差的二元全息图投影显示屏幕系统

徐　昆　贤

(上海市激光技术研究所)

提要：本文使用点源发散光束记录全息屏幕，在记录时不必使用大孔径光学系统，经理论计算表明，使用这种二元全息图能达到消三级球差的目的，因此提高了屏幕系统的成象分辨率。

A two-element holographic projection display screen for correction of the third-order spherical aberration

Xu Kunxian

(Shanghai Institute of Laser Technology)

Abstract: Divergent beams from point source have been used for recording of holographic screen. As a consequence, large-aperture optics necessary in recording such screen can be avoided. Theoretical computations have proved that it is possible to eliminate the third-order spherical aberration by using two-element holograms and the imaging resolution of the screen system has been improved.

一、引　　言

三维全息投影显示装置中的一个重要部件是全息投影屏幕[1]。它一般都用能形成会聚参考光束的光学系统按逆光束记录[2,3](图1(a))。此法要有大孔径(其尺寸要大于待记录全息屏幕的尺寸)辅助光学系统。但往往因此而出现光学加工上的困难。所以人们提出了按发散光束的顺光束记录全息屏幕的方法[4](图1(b))。但这时由于屏幕的相对孔径$\left(\dfrac{D}{R_0}\right)$较大，全息图边缘部分的光束入射角很大，从而导致很大的几何象差，因而也提出了

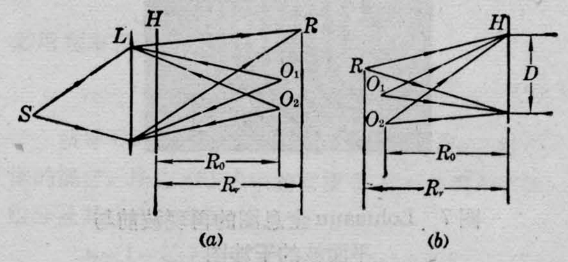

图　1

设计消象差全息屏幕系统的任务。采用光栅与全息图相结合的二元全息图系统[5]，借以使离轴全息图变为“准共轴全息图”有可能减

收稿日期：1981年1月23日。

小象差和色散。参照光栅与全息图组合的系统，本文采用按发散光束记录的二元全息图所组成的全息屏幕系统，并从理论分析计算证明了该系统能达到使所再现的会聚光束消三级球差的目的。

二、全息图的记录

当记录离轴点源全息图 H_1(在 xz 平面)时，设参考光束和物光束的点源位置位于 r_1 和 O_1，再现点源在 C_1，成象点在 I_1(见图2)。

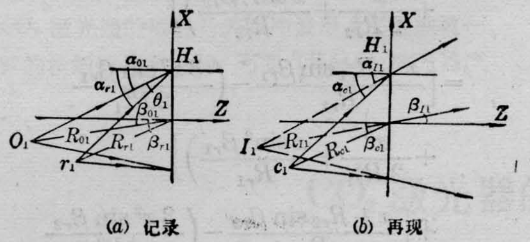

图2 H_1 的记录和再现

当记录和再现有相同波长时，对坐标 x 的全息图单元来说则有如下的关系式[6]：

$$\sin\alpha_{I1}=\sin\alpha_{c1}+\sin\alpha_{01}-\sin\alpha_{r1} \tag{1}$$

式中，α_{r1}、α_{01} 分别为记录时参考光束和物光束对坐标 x 的全息图单元的投射角；α_{c1}、α_{I1} 为再现时再现光束的投射角和成象光束的衍射角。

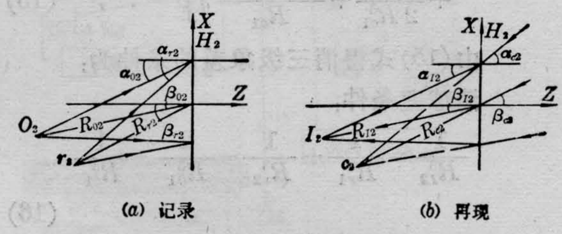

图3 全息图 H_2 的记录和再现

同样，H_2 用相似的方法记录(图3)，记录时相应角度为 α_{r2}、α_{02}；再现时相应角度为 α_{c2}、α_{I2}。则有：

$$\sin\alpha_{I2}=-(\sin\alpha_{c2}+\sin\alpha_{02}-\sin\alpha_{r2}) \tag{2}$$

(2)式中 α_{I2} 与(1)式中的 α_{I1} 异号。表示(1)式取虚象衍射级，而(2)式则取实象衍射级。

如果由全息图 H_1 所再现的衍射光束(成象光束)为 H_2 的再现光束。当两全息图(即 H_1、H_2)彼此靠近时(图4)，则有：

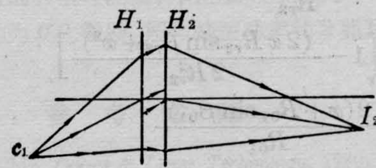

图4 由 H_1、H_2 组成的二元全息图系统

$$\alpha_{c2}\equiv\alpha_{I1} \tag{3}$$

把(3)式代入(1)、(2)式，则有

$$\sin\alpha_{I2}=\sin\alpha_{r1}+\sin\alpha_{r2}-\sin\alpha_{01}-\sin\alpha_{02}-\sin\alpha_{c1} \tag{4}$$

假如记录时 H_1、H_2 还满足下列条件：

$$\sin\alpha_{01}=\sin\alpha_{02} \tag{5}$$

于是(4)式变为：

$$\sin\alpha_{I2}=\sin\alpha_{r1}+\sin\alpha_{r2}-2\sin\alpha_{01}-\sin\alpha_{c1} \tag{6}$$

该式为本文象差分析计算的基础。

三、象 差 分 析

根据图2、3的几何关系，(6)式可写成：

$$\begin{aligned}\frac{(x+R_{I2}\sin\beta_{I2})}{\sqrt{R_{I2}^2+2xR_{I2}\sin\beta_{I2}+x^2}}&=\frac{(x+R_{r1}\sin\beta_{r1})}{\sqrt{R_{r1}^2+2xR_{r1}\sin\beta_{r1}+x^2}}\\&+\frac{(x+R_{r2}\sin\beta_{r2})}{\sqrt{R_{r2}^2+2xR_{r2}\sin\beta_{r2}+x^2}}\\&-\frac{2(x+R_{01}\sin\beta_{01})}{\sqrt{R_{01}^2+2x\,R_{01}\sin\beta_{01}+x^2}}\\&-\frac{(x+R_{c1}\sin\beta_{c1})}{\sqrt{R_{c1}^2+2\,x\,R_{c1}\sin\beta_{c1}+x^2}}\end{aligned} \tag{7}$$

式中：R_0、R_r、R_c、R_I 分别表示目标源、参考源、再现源和象点距全息图中心的距离；β_0、β_r、β_c、β_I 分别为目标源、参考源、再现源和象点与全息图中心法线所成的偏置角。

把(7)式改写成适于按二项式展开的形式，按二项式展开并取二次项，则有：

$$\frac{x+R_{I2}\sin\beta_{I2}}{R_{I2}}\left[1-\frac{(2xR_{I2}\sin\beta_{I2}+x^2)}{2R_{I2}^2}\right]$$
$$=\frac{x+R_{r1}\sin\beta_{r1}}{R_{r1}}\left[1-\frac{(2xR_{r1}\sin\beta_{r1}+x^2)}{2R_{r1}^2}\right]$$
$$+\frac{x+R_{r2}\sin\beta_{r2}}{R_{r2}}$$
$$\times\left[1-\frac{(2xR_{r2}\sin\beta_{r2}+x^2)}{2R_{r2}^2}\right]$$
$$-\frac{2(x+R_{01}\sin\beta_{01})}{R_{01}}$$
$$\times\left[1-\frac{(2xR_{01}\sin\beta_{01}+x^2)}{2R_{01}^2}\right]$$
$$-\frac{x+R_{c1}\sin\beta_{c1}}{R_{c1}}$$
$$\times\left[1-\frac{(2xR_{c1}\sin\beta_{c1}+x^2)}{2R_{c1}^2}\right] \quad (8)$$

(1) 当偏置角 $\beta=0$（即轴上全息图）时，(8)式变为：

$$\frac{1}{R_{I2}}\left(1-\frac{x^2}{2R_{I2}^2}\right)=\frac{1}{R_{r1}}\left(1-\frac{x^2}{2R_{r1}^2}\right)$$
$$+\frac{1}{R_{r2}}\left(1-\frac{x^2}{2R_{r2}^2}\right)-\frac{2}{R_{01}}\left(1-\frac{x^2}{2R_{01}^2}\right)$$
$$-\frac{1}{R_{c1}}\left(1-\frac{x^2}{2R_{c1}^2}\right) \quad (9)$$

按近轴处理则有：

$$\frac{x^2}{R_i^2}\ll 1 \quad (i=r,\ 0,\ c,\ I) \quad (10)$$

故有：

$$\frac{1}{R_{I2}}=\frac{1}{R_{r1}}+\frac{1}{R_{r2}}-\frac{2}{R_{01}}-\frac{1}{R_{c1}} \quad (11)$$

此式即为该二元全息图系统的高斯象方程。

(2) 当 β 不大*，并按类似于近轴近似的"近偏置轴"近似处理时，下列关系式成立：

$$\frac{2xR_i\sin\beta_i+x^2}{2R_i^2}\ll 1, \quad (12)$$

于是(8)式为

$$\frac{(x+R_{I2}\sin\beta_{I2})}{R_{I2}}=\frac{(x+R_{r1}\sin\beta_{r1})}{R_{r1}}$$
$$+\frac{(x+R_{r2}\sin\beta_{r2})}{R_{r2}}$$
$$-\frac{2(x+R_{01}\sin\beta_{01})}{R_{01}}$$
$$-\frac{(x+R_{c1}\sin\beta_{c1})}{R_{c1}} \quad (13)$$

这时上式要满足高斯成象的条件是偏置角 β_i 要满足下列关系式：

$$\sin\beta_{I2}=\sin\beta_{r1}+\sin\beta_{r2}-2\sin\beta_{01}-\sin\beta_{c1} \quad (14)$$

由此可知：当离轴全息图在近偏置轴近似处理时[7,8]，仍能象按傍轴近似一样得到理想象点。因此对 (7) 式二项式展开时二次项的存在将带来赛得三级象差。当保留二次项时，(8)式变成：

$$\left[\frac{x+R_{I2}\sin\beta_{I2}}{R_{I2}}-\left(\frac{3x^2\sin\beta_{I2}}{2R_{I2}^2}+\frac{x^3}{2R_{I2}^3}+\frac{x\sin^2\beta_{I2}}{R_{I2}}\right)\right]$$
$$=\left[\frac{x+R_{r1}\sin\beta_{r1}}{R_{r1}}-\left(\frac{3x^2\sin\beta_{r1}}{2R_{r1}^2}+\frac{x^3}{2R_{r1}^3}+\frac{x\sin^2\beta_{r1}}{R_{r1}}\right)\right]$$
$$+\left[\frac{x+R_{r2}\sin\beta_{r2}}{R_{r2}}-\left(\frac{3x^2\sin\beta_{r2}}{2R_{r2}^2}+\frac{x^3}{2R_{r2}^3}+\frac{x\sin^2\beta_{r2}}{R_{r2}}\right)\right]$$
$$-2\left[\frac{x+R_{01}\sin\beta_{01}}{R_{01}}-\left(\frac{3x^2\sin\beta_{01}}{2R_{01}^2}+\frac{x^3}{2R_{01}^3}+\frac{x\sin^2\beta_{01}}{R_{01}}\right)\right]$$
$$-\left[\frac{x+R_{c1}\sin\beta_{c1}}{R_{c1}}-\left(\frac{3x^2\sin\beta_{c1}}{2R_{c1}^2}+\frac{x^3}{2R_{c1}^3}+\frac{x\sin^2\beta_{c1}}{R_{c1}}\right)\right] \quad (15)$$

由(15)式得消三级象差的条件为：

消球差条件：

$$\frac{1}{R_{I2}^3}=\frac{1}{R_{r1}^3}+\frac{1}{R_{r2}^3}-\frac{2}{R_{01}^3}-\frac{1}{R_{c1}^3} \quad (16)$$

消彗差条件：

$$\frac{\sin\beta_{I2}}{R_{I2}^2}=\frac{\sin\beta_{r1}}{R_{r1}^2}+\frac{\sin\beta_{r2}}{R_{r2}^2}-\frac{2\sin\beta_{01}}{R_{01}^2}-\frac{\sin\beta_{c1}}{R_{c1}^2} \quad (17)$$

消象散条件：

* 在中等全息图相对孔径下，偏置角 $\beta\leqslant 5°$ 时，由该简略引起的误差为 $\leqslant 1\%$。

$$\frac{\sin^2\beta_{I2}}{R_{I2}}=\frac{\sin^2\beta_{r1}}{R_{r1}}+\frac{\sin^2\beta_{r2}}{R_{r2}}-\frac{2\sin^2\beta_{01}}{R_{01}}-\frac{\sin^2\beta_{c1}}{R_{c1}} \quad (18)$$

如果联合解(11)、(16)式，即可求消三级球差的全息图记录的几何参数 R_{r1}、R_{r2}:

$$\frac{1}{R_{r1}}+\frac{1}{R_{r2}}=\frac{1}{R_{I2}}+\frac{2}{R_{01}}+\frac{1}{R_{c1}}$$
$$\frac{1}{R_{r1}^3}+\frac{1}{R_{r2}^3}=\frac{1}{R_{I2}^3}+\frac{2}{R_{01}^3}+\frac{1}{R_{c1}^3} \quad (19)$$

一般 R_{I2}、R_{c1} 为预先给定，R_{01} 可以选定，故 R_{r1}、R_{r2} 可由(19)式求得：

$$\frac{1}{R_{r1}}=\frac{3P^2+\sqrt{3P(4Q^3-P^3)}}{6P} \quad (20)$$
$$\frac{1}{R_{r2}}=\frac{3P^2-\sqrt{3P(4Q^3-P^3)}}{6P}$$

式中

$$P=\frac{1}{R_{I2}}+\frac{2}{R_{01}}+\frac{1}{R_{c1}}$$
$$Q^3=\frac{1}{R_{I2}^3}+\frac{2}{R_{01}^3}+\frac{1}{R_{c1}^3} \quad (20)'$$

(19)式有实解条件为：

$$4Q^3-P^3\geqslant 0 \quad (21)$$

为使不等式(21)成立，在选定 R_{I2}、R_{c1} 情况下，R_{01} 不能任意选择，可以证明 R_{01} 必须满足下列条件：

$$R_{01}\geqslant\frac{3u^2+\sqrt{3u(16v^3-u^3)}}{4v^3-u^3} \quad (22)$$

式中

$$u=\frac{1}{R_{I2}}+\frac{1}{R_{c1}}$$
$$v^3=\frac{1}{R_{I2}^3}+\frac{1}{R_{c1}^3} \quad (23)$$

这里必须指出，当物光束 R_{01} 为发散光束时，由(22)式可知必须

$$R_{I2}\neq R_{c1},$$

若

$$R_{I2}\equiv R_{c1},$$

则由(22)式求得的 R_{01} 值恒为 ∞。因此当 R_{01} 满足(22)式时，由(20)式求出的参数 R_{r1}、R_{r2} 所记录的 H_1、H_2 当按预先选定的 R_{c1} 再现该系统时就能达到消三级球差的目的。

四、象质估价

现在来估算象差斑的数量级。这一象差斑是由于考虑到对(8)式二项式展开后保留更高次项所引起的高级象差。根据 Latta[9] 和 Mehta[10] 推导，五级象差表达式为：

$$\Delta=\frac{1}{\lambda_c}\Big[\frac{1}{16}(x^2+y^2)^3A-\frac{3}{8}(x^2+y^2)xB+\frac{3}{4}(x^2+y^2)x^2C-\frac{1}{2}x^3D\Big] \quad (24)$$

式中 A、B、C、D 为象差系数。

我们这里仅考虑高级球差的影响，故(24)式中的第一项才是我们关心的。在该二元全息图情况下五级球差系数为：

$$A=\frac{1}{R_{r1}^5}+\frac{1}{R_{r2}^5}-\frac{1}{R_I^5}-\frac{2}{R_0^5}-\frac{1}{R_c^5} \quad (25)$$

横向角球差[11]为：

$$\delta(x)=\frac{\partial\Delta}{\partial x}=\frac{3}{8}x^5A=\frac{3}{8}x^5\Big(\frac{1}{R_{r1}^5}+\frac{1}{R_{r2}^5}-\frac{1}{R_I^5}-\frac{2}{R_0^5}-\frac{1}{R_c^5}\Big) \quad (26)$$

过渡全息图系用平行光束和发散光束记录(图5)，用发散光束再现时象光束为准直光束，故相当于

$$R_I=\infty$$

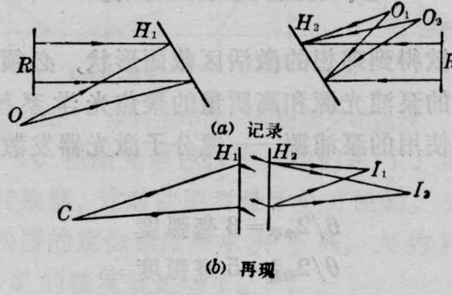

图5 二元全息图屏幕系统

如果记录系统满足条件

$$R_{r1}=R_{r2},$$

则

$$\delta(x)=\frac{3}{8}x^5\left(\frac{2}{R_r^5}-\frac{2}{R_0^5}-\frac{1}{R_c^5}\right) \quad (27)$$

由(22)、(23)式得:

$$R_0=(1+\sqrt{5})R_c, \quad (28)$$

由(19)、(20)式得:

$$R_{r1}=R_{r2}=(\sqrt{5}-1)R_c, \quad (29)$$

因此,把(28)、(29)式代入(27)式得:

$$\delta(x)=\frac{3}{8}\frac{5}{16}\frac{x^5}{R_c^5}=0.11718K^5, \quad (30)$$

式中 $K=\frac{x}{R_c}$ 过渡准直全息图的相对孔径。

例:当 $R_c=1$ 米,$K=0.3$ 时(相对孔径为1:1.67),根据(28)、(29)、(30)式得,消球差的二元全息图记录参数和全息图角象差为:

$$R_0=3.2361\text{ 米}$$

$$R_{r1}=R_{r2}=1.2361\text{ 米}$$

$$\delta(x)=0.11718(0.3)^5$$
$$=0.00028475\approx 1',$$

因此系统的角象差正好与人眼的角分辨率相当。$\delta(x)$ 与 K 成正比,所以在取 $K\leqslant 0.3$ 情况下,该系统均可获得相当好[$\delta(x)<1'$]的成象清晰度。

参 考 文 献

[1] Komar V. G.; *SPIE*, 1977, **120**, 127~144.
[2] G. Groh; *Appl. Opt.*, 1968, **7**, 1643.
[3] Robert J. Collier *et al.*; "Optical Holography", p 377.
[4] Комар В. Г. и др.; *Техника кино и телевидения*, 1978, No. I, C15~17.
[5] J. N. Latta; *Appl. Opt.*, 1972, **11**, 1686.
[6] E. B. Champagne; *JOSA*, 1967, **57**, 51~55.
[7] R. W. Meier; *JOSA*, 1965, **55**, 987.
[8] D. H. Close; *Optical Engineering*, 1975, **14**, 428.
[9] J. N. Latta; *Appl. Opt.*, 1971, **10**, 666~667.
[10] P. C. Mehta; *Opt. Acta*, 1974, **21**, 1005.
[11] J. C. Rayces; *Opt. Acta*, 1964, **11**, 85.

(上接第 35 页)

六、输 出 镜

染料激光器对于不同染料增益变化幅度很大,故在设计这种器件时需选用几种反射率的输出镜,我们选用的是 50%、60% 和 85% 三种反射率。此外,考虑到适用于大的调谐范围,要求膜层的反射率对应波长的曲线比较平滑。不同的反射率可以获得不同的输出背景,常用的是 60% 反射率。

七、泵浦光聚焦系统

欲得到理想的激活区截面形状,必须有优质的泵浦光源和高质量的聚焦光学系统。我们使用的泵浦源——氮分子激光器发散角为:

$$\theta/2_{\text{水平}}=3\text{ 毫弧度}$$

$$\theta/2_{\text{垂直}}=5\text{ 毫弧度}$$

使用一块柱面石英透镜聚焦,该柱面透镜的一级衍射狭缝象宽 3.6 微米,焦距 51 毫米,离焦调节范围 ±5 毫米。在这样一些条件下,染料的激活截面尺寸约为 0.6×1.2 毫米²。

参 考 文 献

[1] Herwing, Kogelnik; The Bell System Technical Journal March, 1965, 455~494.
[2] 张光寅;《激光与光学》,1980, No. 1, 1~8.
[3] T. W. Hänsch; *Appl. Opt.*, 1972, **11**, No. 4, 895.
[4] 母国光等;《光学图象的信息处理》,
[5] J. E. Lawer. *et. al.*: *Appl. Opt.*, 1976, **15**, No. 4, 1083~1090.
[6] Gary K. Klauminzer; *Opt. Enginering*, 1974, **13**, No. 6, 528.
[7] Gary K. Klauminzer; *Laser Focus*, 1975, **11**, No. 11, 35~37.
[8] H. G. Heard; "Laser Parameter Measurements", Hondbook, Chabter 6.
[9] 激光参数测量编写组;《激光参数测量》,上海人民出版社,1976 年
[10] James R. Allkins; *Analytical Chemistry*, **47**, No. 8, 752 A~762 A.
[11] 王应哲;《激光与光学》,1978, No. 4.