在检验非球面中计算全息图的误差分析和误差测量

陈仲裕　郑　辉

（中国科学院上海光机所）

提要：本文分析了在制作计算全息图时产生的误差来源，给出了测量误差的两种方法。

Error analysis and error measurement of computer generated holograms in the test of aspheric surfaces

Chen Zhongyu　Zheng Hui

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: In this paper, we analyse the sources of errors in making computer generated holograms and give two methods for measureing the errors.

计算机产生的全息图可以产生任何所需要的波前，这是因为在大多数情况下，所产生的波前是一个解析的函数，这函数可以在非常短的计算时间内求得大量的值。主要困难是：计算全息图是被测波前的最大梯度和横截面的一个简单函数，如果被测波前的梯度很大，被测口径很大，那么，这将使计算和绘图的工作量增加并会扩大某些误差。作为"样板"的计算全息图，在"零位"检验时，误差的大小直接影响检验结果的精度，因此必须加以讨论。

一、误差的来源

计算全息图产生的误差主要来自以下五个方面：

1．二元化引起的误差

一般光学全息图上干涉条纹的函数为：

$$H(x,\ y)=A\left\{1+\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(A_1x+W(x,\ y))\right]\right\}\tag{1}$$

其中 A 为参考平面波的光强与物波光强的乘积；$A_1x+W(x,\ y)$ 是所需波前 $W(x,\ y)$ 与倾斜平面波 A_1x 之间的光程差公式。

在一维近似的情况下，二元全息图是如此考虑的。设二元全息图的振幅透过率为：

$$T(x)=\sum_{n=1}^{N}P_a(x_n)\delta(x_n)\tag{2}$$

其中 x_n 是全息图函数

$$H(x)=1+\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(A_1x+W(x))\right]$$

收稿日期：1981年2月25日。

的极大值位置，对矩形函数来说：

$$P_a(x)=\begin{cases}1 & 在\ -(a/2)\leqslant x\leqslant(a/2)\\ 0 & 在其他位置\end{cases}$$

N 等于一维时全息孔的数目。

图1表示了二元全息图通过傅氏透镜 L_1 后，在频谱位置上选出了第一衍射级，显然这一级引入了“二元”误差，然后再计算由此衍射级与一平面波合成的光学全息图上的干涉条纹系数，并与公式(1)相比较，得出了误差的值。这一工作完全可由计算机来完成，但需要一定的工作量。文献[2]的结果表明，由此而引起的误差可以小于 $\lambda/50$ 至 $\lambda/100$。提高载频可以进一步减小误差，但是较高的载频又将引起绘图畸变误差的增加，因而要权衡考虑。

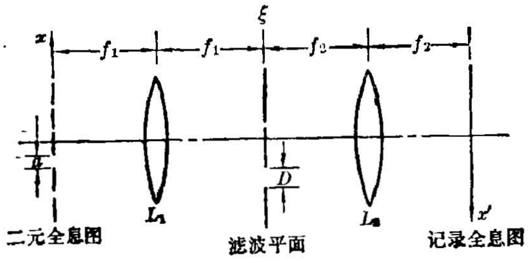


图1 用二元全息图和空间滤波器再现光波前

2. 位相的量子化效应

由于计算机处理的需要，对连续变化的函数需要进行数字化处理——即取样，由此可引起误差。这误差与每个取样单元的量子化等级有关，其直接表现在记录元件的分辨率高低上，如我们记录干板的分辨率为1微米。当沿 x 轴方向取100个取样单元时，全息片的直径为5毫米，那么计算时的 2π 位相取50等级，由此对应的再现波精度可达 $\lambda/50$。

3. 绘图畸变的分析

绘图畸变可以用矢量场来考虑：

$$\boldsymbol{e}(x,\ y)=\boldsymbol{r}_p(x,\ y)-\boldsymbol{r}(x,\ y) \qquad (3)$$

矢量 $\boldsymbol{r}$ 标志着一个点到非畸变补偿的坐标系统上原点的距离和方向：

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},$$

$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 是沿着 x、y 方向的单位矢量；$\boldsymbol{r}_p$ 是绘图笔的真实位置 $(x_p,\ y_p)$ 的矢量。由于绘图畸变 $\boldsymbol{e}(x,\ y)$ 的存在，则全息函数 $H(x,\ y)$ 上的误差可以写成：

$$E_H(x,\ y)=\nabla H(x,\ y)\cdot\boldsymbol{e}(x,\ y) \qquad (4)$$

对公式(1)的全息函数误差是：

$$\begin{aligned}E_H(x,\ y)&\\ =-A\sin&\left\{\frac{2\pi}{\lambda}[A_1x+W(x,\ y)]\right\}\\ &\cdot\left\{\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(A_1+\frac{\partial W(x,\ y)}{\partial x}\right)\cdot e_x(x,\ y)\right]\right.\\ &\left.+\left[\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\partial W(x,\ y)}{\partial y}\cdot e_y(x,\ y)\right]\right\} \qquad (5)\end{aligned}$$

即它随着全息函数的带宽变宽和载频变大而增加。从上式还可以看出，沿着载频轴（也就是 x 轴）方向的绘图畸变将引起最大的误差，即被再现的波前在 x 轴方向产生最大的畸变。

对 Lohmann 全息图不离焦的情况来说，我们取 $N=200$，$e_x(x,\ y)=e_y(x,\ y)=0.0125$ 毫米（这一参数是我们所使用的绘图仪的精度）。由附录给出的数据可知，x 轴方向与 y 轴方向的绘图畸变比为：

$$E_H(x)/E_H(y)\approx 9.5\ 倍,$$

由此而引起的总的绘图误差为：

$$\overline{E_H(x,\ y)}\approx 0.0265\lambda\approx\lambda/38;$$

对线全息图离焦的情况来说，我们取 $N=100$，则：

$$E_H(x)/E_H(y)\approx 21.8\ 倍,$$

$$\overline{E_H(x,\ y)}\approx 0.01=\lambda/100。$$

4. 缩微的精度考虑

缩微的精度主要与使用照相镜头质量和调整精度有关。一般来说，照相镜头对所拍物体每一部分的误差是不一样的，特别是大物体，如果中间清楚了，边缘就模糊，反之亦一样。所以对大物体来讲，绘图误差小了，但照相镜头引起的误差可能变大，所以对照相镜头的质量要求较高。

另外，调整精度的直接影响之一是反映了全息图尺寸的不正确性。由此而引起的误

差我们分析如下:

$$\varDelta W=W(\rho)-W[\rho/(1+\epsilon)] \qquad (6)$$

式中 $\rho=(x^2+y^2)^{1/2}$; ϵ 是调整的放大率误差，一般来说总是很小的。

将上式泰勒级数展开得;

$$\varDelta W\approx\left(1-\frac{1}{1+\epsilon}\right)\frac{\partial W}{\partial\rho}\rho \qquad (7)$$

这里 $\varDelta W$ 正比于波前的微分 $\varDelta W/\partial\rho$。

例如，当 $\epsilon=0.001$ 时:

在 Lohmann 全息图不离焦的情况下,

$$\varDelta W\approx\lambda/50;$$

在线全息图离焦的情况下,

$$\varDelta W\approx\lambda/200。$$

5. 全息片基的影响

当激光束通过全息片基和乳胶层后都要引起误差，由于全息片厚度不均匀引起的误差一般可采用“液门”的方法来解决，而片基的光学质量则应经过一定的挑选。以上是按图2所示装置，把全息片放在 G_1 位置上时所要考虑的。当把全息片放在 G_2 位置上时，则由于参考光束与被检光束同时通过此片，那么片基所引起的误差就消除掉了。我们测试了把片基放在 G_1 位置上而产生的误差，其误差为: $\varDelta W\approx\lambda/25$，结果示于图3。

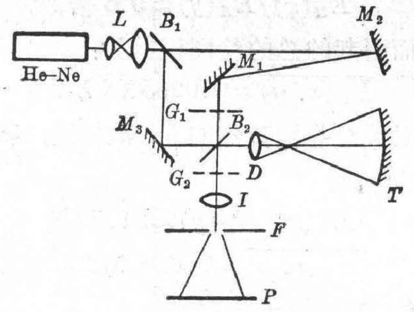


图2 Twyman-Green 干涉仪

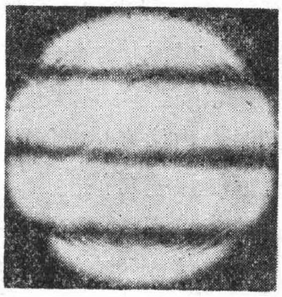


图3 由全息片基引起的误差

二、全息图的自检

对全息图的检验，我们采用了两种方法。

1. 简接检验法

用绘图机绘制一张线性光栅，经缩微后制成的粗光栅就是一张二元全息图，把它放入图4所示的装置上进行检验，即可得到结果。图中 G 为计算全息光栅。

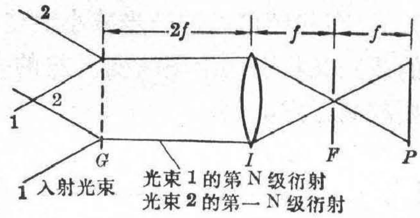


图4 计算全息光栅的自检

由图5测得的干涉条纹为二束衍射波相干涉，干涉图上 $\lambda/2$ 的畸变表示了光栅常数 d 的 $1/2N$ 的误差。其中 N 是第 N 级衍射级次，为了提高检验的灵敏度，则可以提高衍射级次。

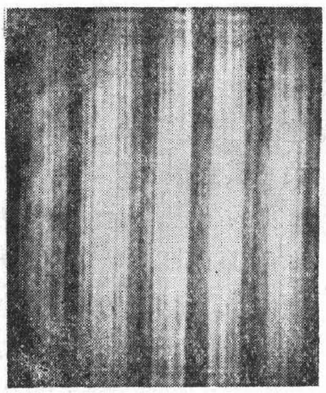


图5 二束衍射波的干涉图

在图4的测试过程中尚需注意: 入射光应向着乳胶一面，否则全息片基厚度的变化将影响干涉图的清晰度; 同时作为片基的玻璃，应经过严格的挑选，致使玻璃的折射率变化引起的畸变为最小。

2. 直接检验法

把绘制的非球面波前全息图直接放入图6所示的装置，测出其波象差曲线，并与理论曲线相比较而得。

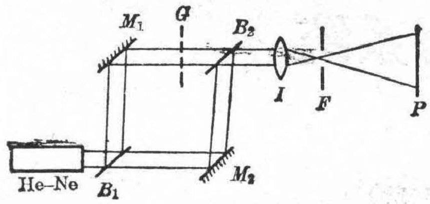
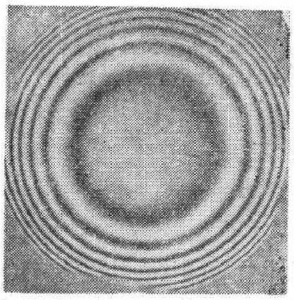
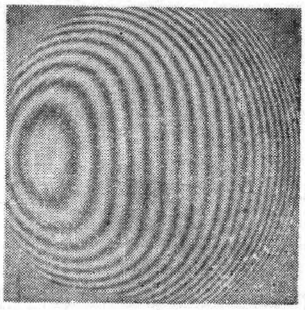


图6 计算全息图的自检

图7是 Lohmann 全息图产生的一级衍射波与平面波相干涉的结果。其中 (a) 是与正交平面波干涉的同心圆；(b)是与倾斜平面波干涉而得。



(a)



(b)

图7 Lohmann 全息图的再现波前与平面波的干涉图

测得的波象差曲线与理论曲线相比较的结果示于图8。结果是边缘部分较差，而中间部分都要好于 $\lambda/10$。这是因为我们没有用“内插法”对等间隔的取样进行修正[2]。从这一点来说，产生的全息图是有误差的，其误差 ΔW 比例于取样单元宽度 Δ 的平方，波象

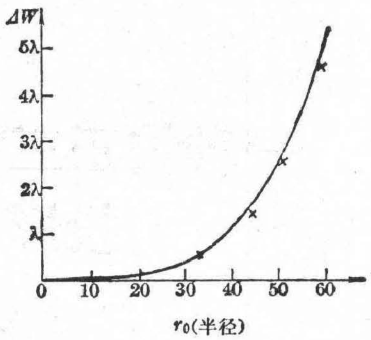


图8 Lohmann 全息图再现波前的误差测量

×—测量数据；实线——理论曲线

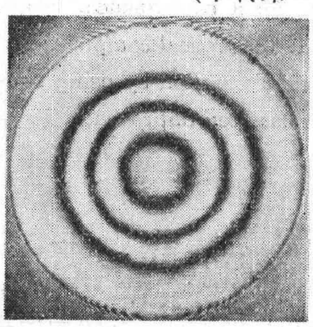
差 $W(x, y)$ 和它的微分[3]：

$$\Delta W=\left(\frac{\Delta}{\lambda}\right)^2\cdot W(x,\ y)\cdot\frac{\partial W(x,\ y)}{\partial x} \tag{8}$$

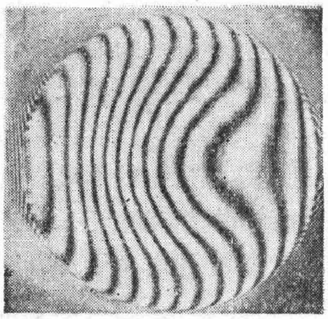
图9是线全息图的情况，其类同于图7，而图10类同于图8。由于线全息图的产生过程中用了“迭代法”和离焦补偿，所以所得结果要好于 $\lambda/20$。

综上所述，我们可以看到，计算全息图本身引起的误差：对不离焦的 Lohmann 全息图来讲约 $\lambda/18$，对离焦的线全息图来讲约

(下转第21页)



(a)



(b)

图9 线全息图的再现波前与平面波的干涉图

是正，可逆计数器中的数累加，经数模转换输出使纤径变细的信号；如果是负，可逆计数器的数累减，将输出使纤径变粗的信号。这样，每次测量的结果都使纤径与预置值逐渐逼近，直至相等。

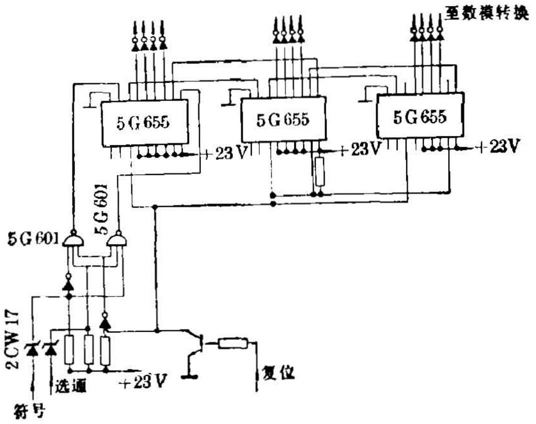


图 9

不同的拉丝系统，对控制信号的大小要求也是不同的，通过调节运算放大器的放大倍数，即可满足各种不同的拉丝系统所要求的控制信号的大小。

上述控制系统在本所光纤拉丝机上联试时，测量点离预制件加热点距离约 30 厘米，当拉丝速度为 15 米/分时，控制精度在 ±1% 以内。从控制方法本身来说，其精度可在 ±0.3 微米以内。影响控制精度的主要原因是加热点与测量点之间的距离太长，引起了时间上的滞后。如上所述，在 30 厘米的距离下，速度为 15 米/分，即要滞后 1.2 秒。为了缩短滞后时间，就要求减小加热点到测量点的距离，同时也要求提高拉丝速度。今后将采用温度和速度联合控制方法，进一步提高纤径控制的精度。

安徽大学和温州地区无线电厂参加了本方法的研究工作。

参 考 文 献

[1] L. G. Cohen, P. Glynn; *Rev. Sci. Instrum.*, 1973, **44**, No. 12.

[2] 高均林;《电子计测》,1975, No. 4, 49.

[3] D. H. Smithgall *et al.*; *Appl. Opt.*, 1977, **16**, No. 9, 2395.

(上接第 25 页)

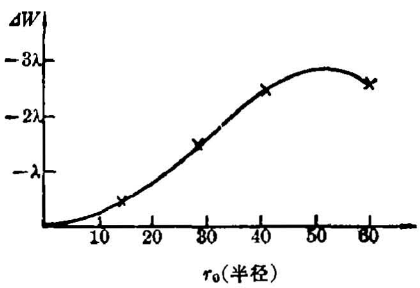


图 10 线全息图再现波前的误差测量

×—实验数据；实线——理论曲线

λ/33。应该指出，在图 6 装置中，我们忽略了片基影响的计算，但其在测量中却是不可忽视的因素，因此测量值较计算值大。

附 录

对轴对称的象差波面来说，产生计算全息图的计算公式为：

$$\overline{W}=A_0+A_1x+2[A_2x^2+A_4x^4+A_6x^6+\cdots]$$

其中 A_0 表示坐标原点沿 x 轴方向的位移；A_1 与平行于 y 轴的倾斜平面的参考波有关；A_2 为发散镜相对于被检镜移动而引起的象差系数；A_4、A_6 都是高级象差系数，它们分别由如下参数表示：

$$A_0=0,$$
$$A_1=ND/\lambda;$$
$$A_2=d/2R^2;$$
$$A_4=1-e/8R^3;$$
$$A_6=1-e^2/16R^5,$$

其中 N 是条纹数；D 是被检镜的口径；λ 是波长；d 是发散镜移动量；R 是被检镜的顶点曲率半径；$e=1-\epsilon^2$，ϵ 是被检镜的偏心率。

参 考 文 献

[1] A. F. Fercher; *Opt. Acta*, 1976, **23**, 347.

[2] B. R. Brown, A. W. Lohmann; *IBM J. Res. and Dev.*, 1969, **13**, 160.

[3] Toyohiko Yalagai, Hiroyoshi Saito; *Appl. Opt.*, 1978, **17**, 558.