光束通过硬边光阑的内禀能量和衍射发散度

邓锡铭　方洪烈　黄镇江　林伟平

（中国科学院上海光机所）

提要：光束通过硬边光阑后的衍射发散受到内禀能量项[1]的支配。本文导出匀幅光束刚通过硬边光阑后，其内禀能量正比于光阑周界的总长度。用这个周界来描述远场衍射发散，得到的结果十分简单、直观。

The intrinsic energy and diffraction divergence of a light beam after passing through a sharp edge diaphragm

Deng Ximing　Fang Honglie　Huang Zenjiang　Ling Weiping

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: The diffraction divergence of a light beam after passing through a sharp edge diaph-ragm depends on the intrinsic energy[1] of the beam. In this paper we have derived that the intrinsic energy of a uniform light beam after passing through a sharp edge diaphragm is propor-tional to the total length of the diaphram edge. We obtained a very simple result using the diaphragm edge length to describe the beam diffraction divergence.

光束通过硬边光阑，运用 Kirchhoff 衍射积分，远场的 Fraunhofer 衍射花样（包括振幅及位相分布）已得到完全的描述。通常还引进一个衍射角从整体上反映光束衍射发散的程度，但这仅限于在少数特殊情况下才有意义。例如，匀幅平行光束通过在直径 D 的圆周范围内拥有大量无规分布的直径为 d 的小孔，则远场光束半极大强度处对应的衍射角仍为 $\sim\lambda/D$，但在这个衍射锥角内却只包含很小一部分能量，失去了从整体上反映衍射发散的含意。因此，我们重新定义一个光束能量发散度 δ：

$$\delta\equiv\frac{E_{\perp\infty}}{E}\tag{1}$$

E 是光束能量；$E_{\perp\infty}$ 是光束在远场区的横向能量，即：

$$E_{\perp\infty}=\int_{z\to\infty}\phi_0^2\sin^2\gamma\,ds\tag{2}$$

其中　$\sin\gamma=\left|\frac{\boldsymbol{k}}{k}\times\boldsymbol{e}_3\right|$，$\boldsymbol{e}_3$ 是沿光束传输轴（z 轴）的单位矢量，波数 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$，$\boldsymbol{k}$ 是波矢；ϕ_0 是实振幅。积分在远场区内沿垂直于 z 轴的任一截面进行；光阑位于 $z=0$ 截面，其线度 $\gg\lambda$。

这里我们不用动量比来定义 δ，而用了

收稿日期：1981 年 3 月 11 日。

能量比，是考虑到用光束静止质量[1]表达式中的内能 E_0 来描写光束衍射传输有以下优点：

$$E_0=\frac{1}{k^2}\int(\nabla\phi_0)^2 ds+\int\frac{\phi_0^2}{C^2}(C\nabla L-\boldsymbol{V}_c)ds^2 \quad (3)$$

式中所用符号与[1]相同，只是 ϕ_0^2 代表能量密度，不再满足归一化条件，积分沿横截面进行。这样：

(a) 可以把衍射部分和几何光学传输部分区分开来。前者由内禀能量项（右边第一项积分）描写；后者由第二项积分描写，

(b) 能够反映出在每个传输截面上衍射能力的增减变化；

(c) 在傍轴条件下，在自由空间传输过程中，内能 E_0 保持不变。

除此之外，还注意到在远场区 $\nabla\phi_0$ 是高级小量，内禀能量项 $E_{\phi\infty}$ 为零：

$$E_{\phi\infty}=\int_{z\to\infty}\frac{1}{k^2}(\nabla\phi_0)^2 ds=0 \quad (4)$$

加上在傍轴条件下，$|\nabla L|\approx 1$，所以：

$$E_{\perp\infty}=\int_{z\to\infty}\frac{\phi_0^2}{C^2}(C\nabla L-\boldsymbol{V}_c)^2 ds=\int_{z\to\infty}\phi_0^2\sin^2\gamma\, ds \quad (5)$$

同时考虑到内能 E_0 在传输过程中保持不变，故有：

$$E_0=E_{\phi\infty}+E_{\perp\infty}=E_{\perp\infty} \quad (6)$$

这样，能量发散度表达式(1)可写成：

$$\delta=\frac{E_0}{E} \quad (7)$$

因此，可直接将初始条件（振幅及位相分布）代入(3)式算出内能 E_0，即可按(7)式预告光束在远场区的能量发散度，而不需要计算衍射积分。此外，从内能 E_0 的表达式中还可看出，我们不仅可以区分开衍射部分和几何（光学）部分对 δ 的贡献，而且还可以区别硬边光阑边缘以及光阑里面不均匀的振幅这两个不同部分引起的衍射对 δ 的贡献。在分析、解决实际问题时，这种区分非常有用。

如何求得硬边光阑边缘区域的内禀能量需要进一步讨论。先假定通过硬边光阑的光束是匀幅的，而光阑的线度又远大于波长。在这种条件下，我们不需知道光阑边缘附近的详细的振幅分布。因为，光阑边界各处显然具有相同的振幅梯度（$\nabla\phi_0$）分布，而在光阑里面，由于匀幅，$\nabla\phi_0$ 处处为零。这样，光束刚通过光阑之后，内禀能量 $E_{\phi 0}$ 显然正比于光阑周界的总长度。如用 $\rho\xi$ 代表单位长度周界边沿的内禀能量（ρ 是入射光束单位截面积的能量），则 $E_{\phi 0}$ 应等于：

$$E_{\phi 0}=\int_{z=0}\frac{1}{k^2}(\nabla\phi_0)^2 ds=\rho\xi l \quad (8)$$

l 是光阑周界总长度。同时，由于入射光束是平行光束，在光阑截面处的横向能量 $E_{\perp 0}$ 为零，即：

$$E_{\perp 0}=\int_{z=0}\frac{\phi_0^2}{C^2}(C\nabla L-\boldsymbol{V}_c)^2 ds=0 \quad (9)$$

(8)，(9)代回(3)得：

$$E_0=\rho\xi l \quad (10)$$

问题是要得到 ξ 值。为此，选用一个一维的缝，缝宽 $2a\gg\lambda$，缝长 $2b=\infty$，运用衍射积分求出 $E_{\perp\infty}$，即可确定 ξ 值。单位缝长内的光束在远场区的横向能量等于[2]：

$$E'_{\perp\infty}=\int_{z\to\infty}\phi_0^2\sin^2\gamma\, ds=I_0\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(ka\sin\theta)}{(ka\sin\theta)^2}\sin^2\theta\, d\theta \quad (11)$$

其中 $I_0=\dfrac{2aE}{\lambda}$，$E=2a\rho$

考虑到：

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos(2ka\sin\theta)d\theta=0 \quad (12)$$

采用这个极限近似值，(11)式等于：

$$E'_{\perp\infty}=\frac{\rho}{k} \quad (13)$$

代回(6)，(10)，并注意到 $l=2$，则有：

$$\xi=\frac{1}{2k} \quad (14)$$

注意到ξ与光阑的几何形状无关，应该适用于各种几何形状的硬边光阑，只需满足(12)式极限近似式。代回(8)式，即可得出在光阑截面上光束的内禀能量：

$$E_{\phi 0}=\frac{\rho}{2k}l \qquad (15)$$

它正比于光阑周界总长度l、能量密度ρ、波长λ。结果非常简单、直观。而且能量发散度δ也非常简单，等于：

$$\delta=\frac{\frac{\rho l}{2k}}{\rho A}=\frac{1}{2k}\frac{l}{A} \qquad (16)$$

即正比于光阑周长l，反比于通光面积A。

作为(15)、(16)式的验证，考察一下长和宽各为$2a$及$2b$的硬边光阑引起的光束内禀能量。

用远场区波矢$\boldsymbol{k}$的两个方向余弦角$\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，$\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$表示(2)式中的$\gamma$得：

$$\sin^2\gamma=\sin^2\alpha+\sin^2\beta \qquad (17)$$

这样 $dE_{\perp\infty}=I(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)d\alpha d\beta$

其中[2] $$I=\frac{\rho(4ab)^2}{\lambda^2}\left[\frac{\sin(ka\sin\alpha)}{ka\sin\alpha}\right]^2\times\left[\frac{\sin(kb\sin\beta)}{kb\sin\beta}\right]^2$$

所以 $$\begin{aligned}E_{\perp\infty}=&\frac{\rho(4ab)^2}{\lambda^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(ka\sin\alpha)}{k^2a^2}d\alpha\\&\times\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(kb\sin\beta)}{(kb\sin\beta)^2}d\beta\\&+\frac{\rho(4ab)^2}{\lambda^2}\\&\times\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(kb\sin\beta)}{k^2b^2}d\beta\\&\times\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(ka\sin\alpha)}{(ka\sin\alpha)^2}d\alpha \qquad (18)\end{aligned}$$

再次采用极限近似式(12)，上述积分等于：

$$E_{\perp\infty}=\frac{\rho}{2k}(4a+4b) \qquad (19)$$

由于入射光束是平行、匀幅光束，远场区内的横向能量应该等于在光阑截面上的内禀能量，而矩形光阑的周长l正好等于$(4a+4b)$，故(19)式的结果正是(15)式所要求的。

此外，关于(12)式的近似性质，再作一点讨论。用$S(2a)$代表以参数$2a$为变数的积分值，即：

$$S(2a)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(2ka\sin\theta)d\theta=\pi J_0(2ka)$$

所以 $$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(ka\sin\theta)}{(ka\sin\theta)^2}\sin^2\theta\, d\theta&=\frac{\pi}{2k^2a^2}\left[1-\frac{S(2a)}{\pi}\right]\\&=\frac{\pi}{2k^2a^2}[1-J_0(2ka)]\end{aligned}$$

当$2ka\gg1$，贝塞尔函数$J_0(2ka)$值满足：

$$|J_0(2ka)|\leqslant\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{2a}}$$

当缝宽$2a>10\lambda$，$|J_0(2ka)|<10^{-1}$，这时，采用(12)式极限值计算内禀能量所带来的百分误差已下降到10%以内。

最后，列举一个应用(16)式的例子，求N个无规分布的全同小孔光阑的δ。假定入射光束是平行、匀幅光束，小孔线度$\gg\lambda$，单个小孔周界长度为l_0，面积为A_0，则有：

$$\delta=\frac{1}{2k}\frac{l}{A}=\frac{1}{2k}\frac{Nl_0}{NA_0}=\frac{1}{2k}\frac{l_0}{A_0}$$

正好等于单个小孔的衍射发散度，与用衍射积分得到的结果相同。

参考文献

[1] 邓锡铭，方洪烈；《激光》，1980，**7**，No. 2, 14.

[2] M. Born; "Principles of Optics", Chapter VIII.