

电磁场的梯度矢势与玻姆量子势

邓锡铭 方洪烈

(中国科学院上海光机所)

提要: 本文证明了电磁场梯度矢势的体应力等于玻姆(D. Bohm)力。因此, 它表明电磁场的梯度矢势具有更明显的物理意义。

The gradient vector potential of electromagnetic field and the Bohm quantum potential

Deng Ximing Fang Honglie

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: In this paper it is proved that the bulk stress of electromagnetic field equals the Bohm force of electromagnetic field. This indicates that there is more profound physical meaning of the gradient vector potential of electromagnetic field.

在文献[1]中, 我们建立了一个电磁场的梯度矢势 φ , 它等于(这里所用的符号与[1]相同):

$$\varphi = -\frac{1}{2k_0^2} \left(\frac{\nabla \phi_0}{\phi_0} \right). \quad (1)$$

由 φ 可以导出在真空中电磁场内部的应力。并已指出: 光的衍射、干涉等波动现象以及光的压力均被看作是存在这种内部应力的结果。

另一方面, 玻姆(D. Bohm)曾经在量子力学中建立了一个假想的量子势^[2]。把玻姆量子势的概念推广到电磁场, 它具有以下的形式^[1, 2]:

$$\varphi_B = -\frac{1}{2k_0^2} \frac{\nabla^2 \phi_0}{\phi_0}. \quad (2)$$

这里我们指出: 玻姆量子势是标势, 不是矢势。

玻姆力等于来自梯度矢势的体应力。

我们知道, 由(2)式可导出玻姆力 f_B

$$f_B = \phi_0^2 (-\nabla \varphi_B) \quad (3)$$

这里, ϕ_0^2 代表电磁场场矢量沿一个直角坐标轴的分量所对应的平均能量密度。将(2)式代入(3)式得到

$$\begin{aligned} f_B = \frac{1}{2k_0^2} \left\{ \left[\phi_0 \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \phi_0) - \nabla^2 \phi_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right] e_1 \right. \\ \left. + \left[\phi_0 \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \phi_0) - \nabla^2 \phi_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial y} \right] e_2 \right. \\ \left. + \left[\phi_0 \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \phi_0) - \nabla^2 \phi_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \right] e_3 \right\}, \quad (4) \end{aligned}$$

其中 e_1, e_2, e_3 分别代表沿 x, y, z 坐标轴的单位矢量。另一方面, 由(1)式可导出电磁场梯度矢势的体应力 T_0

$$T_0 = \nabla \Phi. \quad (5)$$

下面我们将证明: 由玻姆量子势得到的

收稿日期: 1979年11月23日。

其中张量 Φ 等于:

$$\Phi = \phi_0^2 (-\nabla\varphi)$$

$$= - \begin{pmatrix} \phi_0^2 \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} & \phi_0^2 \frac{\partial\varphi_y}{\partial x} & \phi_0^2 \frac{\partial\varphi_z}{\partial x} \\ \phi_0^2 \frac{\partial\varphi_x}{\partial y} & \phi_0^2 \frac{\partial\varphi_y}{\partial y} & \phi_0^2 \frac{\partial\varphi_z}{\partial y} \\ \phi_0^2 \frac{\partial\varphi_x}{\partial z} & \phi_0^2 \frac{\partial\varphi_y}{\partial z} & \phi_0^2 \frac{\partial\varphi_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

其中 φ_x 、 φ_y 、 φ_z 分别代表矢势 φ 在 x 、 y 、 z 坐标轴的分量。由此得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0 = & \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_0^2 \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi_0^2 \frac{\partial\varphi_x}{\partial y} \right) \right. \right. \\ & + \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi_0^2 \frac{\partial\varphi_x}{\partial z} \right) \right] \mathbf{e}_1 + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_0^2 \frac{\partial\varphi_y}{\partial x} \right) \right. \\ & + \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi_0^2 \frac{\partial\varphi_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi_0^2 \frac{\partial\varphi_y}{\partial z} \right) \right] \mathbf{e}_2 \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_0^2 \frac{\partial\varphi_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi_0^2 \frac{\partial\varphi_z}{\partial y} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi_0^2 \frac{\partial\varphi_z}{\partial z} \right) \right] \mathbf{e}_3 \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

将(1)式代入(6)式,计算 \mathbf{T}_0 沿 x 轴的分量:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_0^2 \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} \right) = - \frac{1}{2k_0^2} \left[\phi_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial\phi_0}{\partial x} \right], \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\phi_0^2 \frac{\partial\varphi_x}{\partial y} \right) = - \frac{1}{2k_0^2} \left[\phi_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2\phi_0}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial\phi_0}{\partial x} \right], \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\phi_0^2 \frac{\partial\varphi_x}{\partial z} \right) = - \frac{1}{2k_0^2} \left[\phi_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2\phi_0}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial\phi_0}{\partial x} \right], \quad (9)$$

将(7)、(8)、(9)式加起来得:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_0^2 \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi_0^2 \frac{\partial\varphi_x}{\partial y} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi_0^2 \frac{\partial\varphi_x}{\partial z} \right) \right] \\ & = - \frac{1}{2k_0^2} \left[\phi_0 \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2\phi_0) - \nabla^2\phi_0 \frac{\partial\phi_0}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

由对称关系,沿 y 轴、 z 轴的分量具有与(10)

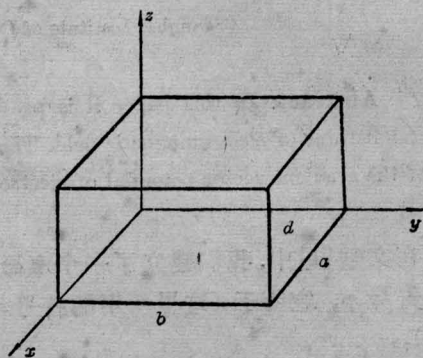
式对称的形式,将这些结果代回(6)式并与(4)式作比较得:

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{f}_{B_0} \quad (11)$$

即:体应力等于玻姆力。

值得注意的是:玻姆量子势是作为一种假想建立起来的,而由梯度矢势导出的面应力与从经典电磁场理论导出的光压有着确定的内在联系*,而光压是早已被实验所证实了的物理实在。这一点与玻姆量子势的假想性质是有区别的。而玻姆力又已包含在由梯度矢势导出的体应力之中。

通过分析下面一个典型例子,会帮助我们更形象地看到,对于驻波来说,在一个封闭腔内,来自梯度矢势的作用于整个腔壁的总面应力等于总光压。



在一个边长为 a 、 b 、 d 的立方体谐振腔内,存在着模参数为 m 、 n 、 q 的电磁模。腔的共振频率 ν_{mnq} 等于^[3]:

$$\nu_0 \equiv \nu_{mnq} = c \left(\frac{m^2}{4a^2} + \frac{n^2}{4b^2} + \frac{q^2}{4d^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

其中 c 是光速, m 、 n 、 q 均为正整数。或用波长 λ_{mnq} 来表示:

$$\lambda_0 \equiv \lambda_{mnq} = \left(\frac{m^2}{4a^2} + \frac{n^2}{4b^2} + \frac{q^2}{4d^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

腔的内壁的反射系数等于 1。

腔内场矢量 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 的时间平均值分别等于^[3]:

* 关于这种内在联系,将另作专题讨论。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & i A_e [s_1 s_3 \cos(k_0 s_1 x) \sin(k_0 s_2 y) \\ & \times \sin(k_0 s_3 z) \mathbf{e}_1 \\ & + s_2 s_3 \sin(k_0 s_1 x) \cos(k_0 s_2 y) \sin(k_0 s_3 z) \mathbf{e}_2 \\ & + (s_1^2 + s_2^2) \sin(k_0 s_1 x) \sin(k_0 s_2 y) \\ & \times \cos(k_0 s_3 z) \mathbf{e}_3], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & A_h [s_2 \sin(k_0 s_1 x) \cos(k_0 s_2 y) \cos(k_0 s_3 z) \mathbf{e}_1 \\ & - s_1 \cos(k_0 s_1 x) \sin(k_0 s_2 y) \cos(k_0 s_3 z) \mathbf{e}_2]. \end{aligned} \quad (15)$$

其中 A_e 、 A_h 为振幅常数, 而

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{2\pi}{\lambda_0}, \quad s_1 = m \frac{\lambda_0}{2a}, \\ s_2 &= n \frac{\lambda_0}{2b}, \quad s_3 = q \frac{\lambda_0}{2d} \end{aligned}$$

$$\text{而} \quad (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = 1.$$

下面按(14)式计算腔内来自电场的场流体的应力分布。

分别用 ϕ_{01}^2 、 ϕ_{02}^2 、 ϕ_{03}^2 代表电场矢量沿三个坐标轴分量所对应的场能量密度分布。总电场能量密度分布 ϕ_0^2 自然等于:

$$\phi_0^2 = \phi_{01}^2 + \phi_{02}^2 + \phi_{03}^2 \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_{01}^2 &= A_e^2 s_1^2 s_3^2 \cos^2(k_0 s_1 x) \sin^2(k_0 s_2 y) \\ &\quad \times \sin^2(k_0 s_3 z), \\ \phi_{02}^2 &= A_e^2 s_2^2 s_3^2 \sin^2(k_0 s_1 x) \cos^2(k_0 s_2 y) \\ &\quad \times \sin^2(k_0 s_3 z), \\ \phi_{03}^2 &= A_e^2 (s_1^2 + s_2^2) \sin^2(k_0 s_1 x) \\ &\quad \times \sin^2(k_0 s_2 y) \cos^2(k_0 s_3 z). \end{aligned}$$

而 A_e 应满足下式:

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^d \phi_0^2 dx dy dz = E_e. \quad (17)$$

E_e 是腔内时间平均的电场总能量。

考虑到(16)式中三个分量的正交性质, 应该分别计算三个部分的应力, 然后迭加起来, 就得到来自电场的部分的场流体总应力分布。

由(5)式知道, 分别垂直于 x 、 y 、 z 轴单

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_x &= \sum_{i=1}^3 \left[-\phi_{0i}^2 \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \mathbf{e}_2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \mathbf{e}_3 \right] \\ \mathbf{T}_y &= \sum_{i=1}^3 \left[-\phi_{0i}^2 \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \mathbf{e}_2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \mathbf{e}_3 \right] \\ \mathbf{T}_z &= \sum_{i=1}^3 \left[-\phi_{0i}^2 \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial z} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial z} \mathbf{e}_2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \phi_{iz}}{\partial z} \mathbf{e}_3 \right] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\text{其中:} \quad \phi_i = -\frac{1}{2k_0^2} \left(\frac{\nabla \phi_{0i}}{\phi_{0i}} \right)$$

在这里, 我们感兴趣的只是腔壁上的应力沿腔壁法线方向的分量, 分别表示为: $(\mathbf{T}_x)_x$ 、 $(\mathbf{T}_y)_y$ 、 $(\mathbf{T}_z)_z$ 。它们分别等于(引用(18)、(16)式):

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{T}_x)_x &= -\left(\phi_{01}^2 \frac{\partial \phi_{1x}}{\partial x} + \phi_{02}^2 \frac{\partial \phi_{2x}}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \phi_{03}^2 \frac{\partial \phi_{3x}}{\partial x} \right) \\ (\mathbf{T}_y)_y &= -\left(\phi_{01}^2 \frac{\partial \phi_{1y}}{\partial y} + \phi_{02}^2 \frac{\partial \phi_{2y}}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \phi_{03}^2 \frac{\partial \phi_{3y}}{\partial y} \right) \\ (\mathbf{T}_z)_z &= -\left(\phi_{01}^2 \frac{\partial \phi_{1z}}{\partial z} + \phi_{02}^2 \frac{\partial \phi_{2z}}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. + \phi_{03}^2 \frac{\partial \phi_{3z}}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

将(1)、(16)式代入(19)式得:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{T}_x)_x &= -\frac{1}{2} A_e^2 s_1^2 [s_2^2 s_3^2 \sin^2(k_0 s_2 y) \\ &\quad \times \sin^2(k_0 s_3 z) \\ &\quad + s_2^2 s_3^2 \cos^2(k_0 s_2 y) \sin^2(k_0 s_3 z) \\ &\quad + (s_1^2 + s_2^2)^2 \sin^2(k_0 s_2 y) \cos^2(k_0 s_3 z)], \\ (\mathbf{T}_y)_y &= -\frac{1}{2} A_e^2 s_2^2 [s_1^2 s_3^2 \cos^2(k_0 s_1 x) \\ &\quad \times \sin^2(k_0 s_3 z) \\ &\quad + s_2^2 s_3^2 \sin^2(k_0 s_1 x) \sin^2(k_0 s_3 z) \\ &\quad + (s_1^2 + s_2^2)^2 \sin^2(k_0 s_1 x) \cos^2(k_0 s_3 z)], \\ (\mathbf{T}_z)_z &= -\frac{1}{2} A_e^2 s_3^2 [s_1^2 s_2^2 \cos^2(k_0 s_1 x) \\ &\quad \times \sin^2(k_0 s_2 y) \\ &\quad + s_2^2 s_3^2 \sin^2(k_0 s_1 x) \cos^2(k_0 s_2 y) \\ &\quad + (s_1^2 + s_2^2)^2 \sin^2(k_0 s_1 x) \sin^2(k_0 s_2 y)]. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

此外,将(16)式代入(17)式得:

$$A_e^2 = \frac{8E_e}{abd\lambda_0^2 \left(\frac{m^2}{4a^2} + \frac{n^2}{4b^2} \right)}. \quad (21)$$

利用(20)式、(21)式即可得到作用在 $x=a$ 、 $y=b$ 、 $z=d$ 腔壁上的总应力(沿腔壁法线分量) $(\mathcal{F}_x)_x$ 、 $(\mathcal{F}_y)_y$ 、 $(\mathcal{F}_z)_z$ 分别如下:

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{F}_x)_x &= \int_0^b \int_0^d (\mathbf{T}_x)_x dy dz \\ &= -\frac{\lambda_0^2 E_e}{4} \frac{m^2}{a^3}, \\ (\mathcal{F}_y)_y &= \int_0^a \int_0^d (\mathbf{T}_y)_y dx dz \\ &= -\frac{\lambda_0^2 E_e}{4} \frac{n^2}{b^3}, \\ (\mathcal{F}_z)_z &= \int_0^a \int_0^b (\mathbf{T}_z)_z dx dy \\ &= -\frac{\lambda_0^2 E_e}{4} \frac{q^2}{d^3}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

另外,只要用(15)式取代(14)式,按以上程序计算一遍,就可得到来自磁场的应力分布,其结果如下:

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{F}_x)'_x &= \int_0^b \int_0^d (\mathbf{T}_x)'_x dy dz \\ &= -\frac{\lambda_0^2 E_h}{4} \frac{m^2}{a^3}, \\ (\mathcal{F}_y)'_y &= \int_0^a \int_0^d (\mathbf{T}_y)'_y dx dz \\ &= -\frac{\lambda_0^2 E_h}{4} \frac{n^2}{b^3}, \\ (\mathcal{F}_z)'_z &= \int_0^a \int_0^b (\mathbf{T}_z)'_z dx dy \\ &= -\frac{\lambda_0^2 E_h}{4} \frac{q^2}{d^3}. \end{aligned} \right\} \quad (22)'$$

显然与(22)式相同,只是 E_e 为 E_h 所取代,后者是腔内时间平均的磁场总能量。所以,用腔内总能量 $E = E_e + E_h$ 取代(22)式的 E_e ,就得到来自腔内整个电磁场流体作用于腔壁的总应力。

注意到(22)式各个结果都不包含坐标变量,故腔内体应力处处为零。这一点与腔内电磁场是驻波场相一致。

让我们考虑一下将 $x=a$ 、 $y=b$ 、 $z=d$ 三块腔壁分别移动 dx 、 dy 、 dz 距离,由于场流体应力的存在,腔内场流体对外界所作的功 dE 等于:

$$\begin{aligned} dE &= [(\mathcal{F}_x)_x dx + (\mathcal{F}_y)_y dy + (\mathcal{F}_z)_z dz] \\ &= -\frac{\lambda_0^2 E}{4} \left(\frac{m^2}{a^3} dx + \frac{n^2}{b^3} dy + \frac{q^2}{d^3} dz \right). \end{aligned} \quad (23)$$

另一方面,腔内场能量 E 可表示为:

$$E = Nh\nu_0, \quad (24)$$

其中 h 是普朗克常数; N 是腔内光子数。当腔壁移动时,只会引起频率 ν_0 的变化,不会引起光子数目的增减。故有:

$$dE = Nh(d\nu_0). \quad (25)$$

将(12)式代入(25)式得:

$$dE = -\frac{\lambda_0^2 E}{4} \left(\frac{m^2}{a^3} dx + \frac{n^2}{b^3} dy + \frac{q^2}{d^3} dz \right). \quad (26)$$

这个结果反映了腔内电磁场的光压力对外界(移动的腔壁)所作的功。(26)式与(23)式完全一致,这一点表明:由梯度矢势得到的腔内场流体作用于整个腔壁的总应力刚好等于电磁场作用于整个腔壁的时间平均的总光压。而仅从玻姆量子势是得不到这个结果的。这就是说,梯度矢势不仅包含了玻姆量子势(见(11)式),而且由梯度矢势导出的总面应力就是早已为实验所证实的总光压。

参 考 文 献

- [1] 邓锡铭等;《激光》,1979,6, No. 11, 1.
- [2] D. Bohm; *Phys. Rev.*, 1952, 85, 166; 180.
- [3] G. Toraldo di Francia, «*Electromagnetic Waves*», 1955, chapter 13.