

关于不稳定腔模的稳定性

张 贵 芬

(中国科学院上海光机所)

提 要

本文对不稳定腔光线模的稳定性进行了讨论。证明了几何光学近似解中的会聚波,不是腔的稳定模。只有发散球面波才是唯一稳定解。

On the stability of unstable cavity modes

Zhang Guifen

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

The stability of the unstable cavity modes are discussed. It is proved that the converging wave in an approximate solution in geometric optics is not the stable mode from the cavity. The only stable solution is the diverging spherical wave.

一、引 言

近年来,大量的理论和实验研究表明,具有大模式体积及强横模区分能力的不稳定腔,对很多实际应用来说,是一种理想的腔结构。但是,就共振腔模的起源问题,尚有不同见解。讨论这一问题,无论是理论上还是实验上,都具有一定意义。

从几何光学近似出发,求解不稳定腔模所满足的方程,可得二个实解。一个代表发散球面波,另一个则是它的倒向波,称之为会聚波。Siegman^[1]指出,发散球面波是稳定模,会聚波是不稳定的。而 Zemskov^[2]认为,

稳定的会聚波是存在的,只有在它收缩到与衍射相平衡后才转为发散波。因此称会聚波是发散波的“核”(seed)。如果这种过程存在,它将是自聚焦的前导,会把介质破坏,这是值得讨论的问题。

下面将证明,发散波是唯一稳定模,而会聚波对扰动极不稳定,在腔内不能形成稳定模,也就是说它不存在。

二、不稳定腔模的 几何光学近似解

对于不稳定腔模的几何近似解,早已为

收稿日期:1979年4月24日。

不少作者得出^[1]。这里为了讨论方便起见，简单地用传输矩阵方法导出。

讨论不稳定光学腔，对称双凸型具有代表性。这种腔由二个等曲率镜子构成，曲率半径为 R ，间距为 d 。腔的 g 因子为

$$g = 1 + \frac{d}{R} > 1,$$

满足不稳定条件 $g^2 > 1$ ，如图 1 所示。光线在腔内往返一次的传输矩阵为：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2g-1 & 2dg \\ 4g(g-1)/d & 4g^2-2g-1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

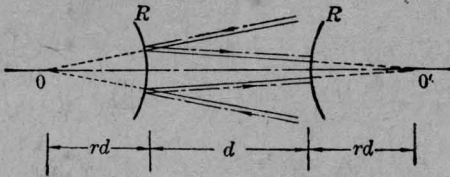


图 1 对称不稳定腔结构
 O, O' 为虚中心； r 为无量纲量；实线为发散波；点划线为会聚波

参考面选在任意镜面前。按照腔模往返一周应满足自再现条件，距镜面为 rd 的球面波往返一次后应满足下面方程：

$$rL = \frac{A(rd) + B}{C(rd) + D}, \text{ 或者 } r \text{ 满足}$$

$$C(rd)^2 + (D - A)rd - B = 0 \quad (2)$$

r 是一无量纲的量，其意义如图 1 所示。将矩阵元的值代入 (2) 式中，得出 r 的二个实解：

$$r_1 = \frac{\sqrt{g^2 - 1} - g + 1}{2(g - 1)} \quad (3)$$

它相应于发散球面波。以及 r_2 ：

$$r_2 = \frac{-\sqrt{g^2 - 1} - g + 1}{2(g - 1)} \quad (4)$$

它相应于会聚波。往返一周放大率

$$m = g + \sqrt{g^2 - 1}.$$

相应发散波的本征值是 m ，损失为

$$\delta = 1 - \frac{1}{m^2},$$

会聚波的本征值是 $1/m$ ，表明无损失。

这二个模虽都是方程 (2) 的解，但它们对扰动的敏感性不同。

三、模的稳定性

本节仍采用传输矩阵求解二个模对扰动的敏感性。假定由于某种扰动，使球面波虚中心移动了 Δr ，往返一周后产生新的偏移量 $\Delta r'$ 。如果 $\frac{\Delta r'}{\Delta r} < 1$ ，则表明该模抗扰动能力强，经过一周后趋向原来位置，能形成稳定模。反之，如果 $\frac{\Delta r'}{\Delta r} > 1$ ，则表明这种偏移经过一周后更变大，对扰动很敏感，在腔内不能形成稳定模，也就是它不能存在。

令初始偏移量为 Δr ，往返一周后为 $\Delta r'$ ，根据传输矩阵，应有如下关系：

$$(r + \Delta r')d = \frac{A(r + \Delta r)d + B}{C(r + \Delta r)d + D}$$

对此式进行展开，利用 r 所满足的方程 (2)，同时略去 $\Delta r \cdot \Delta r'$ 二级小量，可以得出：

$$\frac{\Delta r'}{\Delta r} = \frac{A - Crd}{D + Crd} \quad (5)$$

对发散球面波，将 (1)、(3) 式代入，可得：

$$\left(\frac{\Delta r'}{\Delta r}\right)_\oplus = \frac{(2g^2 - 1) - 2g\sqrt{g^2 - 1}}{(2g^2 - 1) + 2g\sqrt{g^2 - 1}} \quad (6)$$

因为 $g > 1$ ，显然 $\left(\frac{\Delta r'}{\Delta r}\right)_\oplus < 1$ 。这表明发散球面波是稳定的。同理，将会聚波的 r_2 值代入 (5) 式中，则得：

$$\left(\frac{\Delta r'}{\Delta r}\right)_\ominus = \frac{(2g^2 - 1) + 2g\sqrt{g^2 - 1}}{(2g^2 - 1) - 2g\sqrt{g^2 - 1}} \quad (7)$$

显然， $\left(\frac{\Delta r'}{\Delta r}\right)_\ominus > 1$ 。这表明会聚波不稳定，在腔内不能形成稳定模。

从 (6)、(7) 式可以看出，稳定性因子 $\left(\frac{\Delta r'}{\Delta r}\right)$ 与 g 因子有关。 g 越大，也就是放大倍率 m 越大时，发散波抗扰动能力越强，会聚

波就越不稳定。这一结论也为实验证实，腔内扰动大，选择大的 g 因子为好。稳定性因子 $\left(\frac{\Delta r'}{\Delta r}\right)$ 对 g 的关系如图 2 所示。对 $g=1.5$ ，如果 Δr 为 1 厘米，那么经一周往返后 $\Delta r'$ 变化，对发散波 $\Delta r'=0.02$ 厘米，对会聚波 $\Delta r'=50$ 厘米。当 $g=2$ 时， $(\Delta r')_{\text{发}}=5 \times 10^{-3}$ 厘米，而 $(\Delta r')_{\text{会}}=200$ 厘米。可见，变化还是很灵敏的。

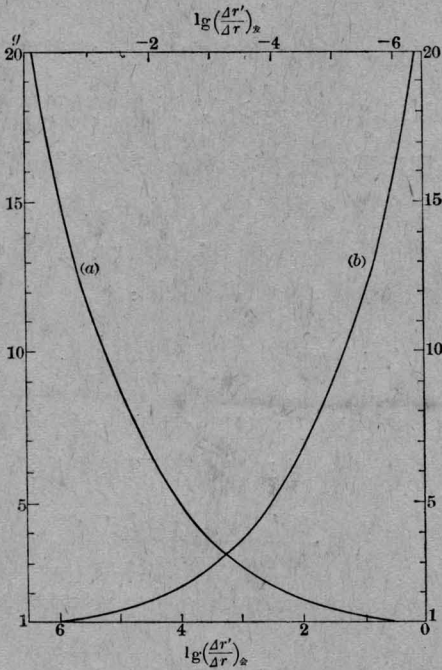


图 2 稳定因子 $\lg\left(\frac{\Delta r'}{\Delta r}\right)$ 与 g 的关系

曲线 (a) — $\lg\left(\frac{\Delta r'}{\Delta r}\right)_{\text{会}}$; 曲线 (b) — $\lg\left(\frac{\Delta r'}{\Delta r}\right)_{\text{发}}$

四、讨 论

在现实激光器中，随机扰动因素是很多的。例如，各种激光介质中的热透镜效应就是其中之一。

不稳定腔中存在二个模的状态与经典力学中球在周期势中的平衡状态很相似，如图 3，从理想平衡角度来看， a 态和 b 态都是球所可以存在的状态，但这二种状态对扰动来说极不相同。对 a 来说是处在非平衡位置，一有扰动就很快不存在，而 b 态则是稳定平衡位置，经扰动后，能自动回到平衡位置。如同现实平衡中球总是处在 b 态一样，不稳定腔中的模总是以发散波形式出现。

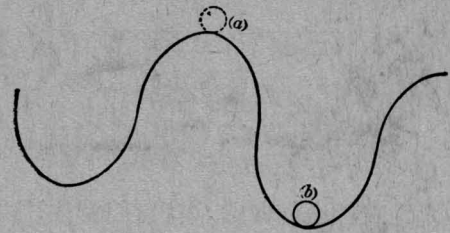


图 3 力学中的两种平衡状态
 a 为不稳定平衡态； b 为稳定平衡态

参 考 文 献

- [1] A. E. Siegman; *Proc. IEEE*, 1965, **53**, No. 2, 277.
- [2] K. I. Zemskov; *S. J. Quan. Electr.*, 1974, **4**, No. 6, 761.