

# 光在激光晶体奇异轴附近的传播

$\text{-Nd}^{3+}$ :  $\text{YAlO}_3$  晶体奇异轴形成的方向与负吸收系数  $\alpha$  的关系

范俊颖 林福成

(中国科学院上海光机所)

## 提 要

本文基于各向异性介质中光传播的波法线复菲涅耳方程, 首次定量计算了  $\text{Nd}^{3+}$ :  $\text{YAlO}_3$  双轴晶体在激光条件下负吸收系数  $\alpha$  与奇异轴形成的方向 ( $P, Q$ ) 的关系。对利用奇异轴特性获得圆偏振的激光输出作了讨论。

## Propagation of light near singular axes in laser crystals

—The relations between the directions of singular axes and the negative absorption coefficient  $\alpha$

*Fan Junying Lin Fucheng*

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

## Abstract

Calculation of relation between the negative absorption coefficient  $\alpha$  and the direction of the singular axes  $P, Q$ . has been made quantitatively for lasing conditions in  $\text{Nd}:\text{YAP}$  crystal for the first time, and this calculation is based on the complex Fresnel's equation of the wave normals of light propagation in anisotropic medium. It is discussed by using this nature of singular axes that a circularly polarized laser beam output can be obtained.

## 引 言

双轴晶体在吸收系数  $\alpha$  (或负吸收系数) 不为零时, 存在与光轴方向不重合的波传播相速度为单值的方向称为奇异轴, 共有四个, 两两对称分布于光轴  $N_1, N_2$  两侧。沿奇异

轴传播的光只能是圆偏振光, 对一特定的奇异轴只允许右旋圆偏振光传播或沿左旋圆偏振光传播<sup>[1]</sup>。激光晶体的这一特点可以在激光器中加以利用<sup>[2]</sup>, 对双轴晶体奇异轴的存在很早有过讨论<sup>[3]</sup>, 但无具体定量计算。本文对  $\text{YAP}:\text{Nd}$  激光晶体在光泵作用下负吸收

收稿日期: 1979年5月14日。

系数  $\alpha$  与奇异轴形成的方向的定量关系作了计算。计算结果指出, YAP:Nd 光轴棒作为激活介质的激光器可以得到圆偏振的激光输出。

## 理论分析

A. 晶体中, 电矢量  $E$  与电位移矢量  $D$  的关系是<sup>[4]</sup>

$$D = \bar{\epsilon} E \quad (1)$$

其中  $\bar{\epsilon}$  为复介电张量, 矩阵元

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \epsilon'_{ij} + i\epsilon''_{ij}, \quad (2)$$

( $i, j$  为  $x, y, z$ )。对非旋光晶体  $\bar{\epsilon}$  的实部各元素都是对称的, 其中介电张量的虚部  $\epsilon''_{ij}$  引起吸收。

为了方便, 我们可以写

$$E = \bar{a} D \quad (3)$$

其中

$$\bar{a} = \bar{\epsilon}^{-1} = a + ib \quad (4)$$

元素

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij} + ib_{ij} \quad (5)$$

因为  $\epsilon''_{ij} \ll \epsilon'_{ij}$ , 在略去  $\epsilon''_{ij}/\epsilon'_{ij}$  项之后, 得到

$$a = \epsilon'^{-1} \quad (6)$$

$$b = \epsilon'^{-1} \epsilon'' \epsilon'^{-1} \quad (7)$$

再将  $D, E$  代入熟知的麦克斯韦方程组, 得到晶体中任意方向  $S$  传播相速度为  $\hat{V}_p$  的波法线菲涅耳方程的矢量表示为

$$\hat{V}_p^2 D = E - S(S \cdot E) \quad (8)$$

在主轴坐标当中  $\bar{\epsilon}$  都是对角化的, 并且对较高对称性的晶体(如正交晶系等)  $\epsilon'$  与  $\epsilon''$  的主轴是重合的。

B. 利用 A 中的分析, 再进行适当的坐标变换, 对任意方向传播的波, 可以得到如下关系

$$r^2 + \frac{\bar{a}_{11} - \bar{a}_{22}}{a_{12}} r - 1 = 0 \quad (9)$$

其中  $r = D_x/D_y$ , 表征波的极化态, 可以证明沿奇异轴方向传播的波满足如下关系:

$$\left\{ \frac{1}{2} (\bar{a}_{11} - \bar{a}_{22}) \right\}^2 + \bar{a}_{12}^2 = 0 \quad (10)$$

这时得到方程 (9) 的两个根为  $r'r'' = 1$ , 重根  $r = \pm i$  分别表示了右旋圆偏振光和左旋圆偏振光的极化态。

C. 长度为  $l$  的 YAP:Nd 光轴棒作为激光介质, 如激光器为 F-P 谐振腔, 两端反射率为  $R_1, R_2$ , 则负吸收系数(或增益系数)  $\alpha$  应满足如下条件:

$$\alpha = \frac{1}{l} \ln(R_1 R_2)^{-1/2} \quad (11)$$

$\alpha$  与发射截面  $\sigma$  及在光泵作用下激光上能级与下能级粒子数密度差  $n$  有关系,

$$\alpha = n\sigma \quad (12)$$

YAP:Nd<sup>3+</sup> 以 1.0795、1.0725、1.0645 微米三种波长工作时的主轴  $x, y, z$  棒的相对增益值已有人进行过测定<sup>[5]</sup>, 为:

$$\alpha_x : \alpha_y : \alpha_z = A : B : C = 0.36 : 1 : 0.27 \quad (1.0795 \text{ 微米})$$

$A, B, C$  只与材料特性有关, 称为材料常数, 可见发射截面  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  与  $A, B, C$  值有关, 也与极化态有关系。

以相速度  $\hat{V}_p$  在腔内传播的波, 电场  $E$  为

$$E = A \cdot e^{i\omega \frac{z}{\hat{V}_p}} \quad (13)$$

如果沿主轴  $x, y, z$  方向传播的电场  $E$  表示为

$$E_i = A_i \cdot e^{i\omega \frac{z}{\hat{V}_i}} \quad (i \text{ 为 } x, y, z) \quad (14)$$

则光强

$$I_i \propto |E_i|^2 = |A_i|^2 |e^{i\omega \frac{z}{\hat{V}_i}}|^2 \quad (15)$$

其中  $\hat{V}_i = C/N_i$ ,  $N_i$  为主轴方向复折射指数,  $c$  为光速,  $N_i$  可以写为

$$N_i = \eta_i + iK_i$$

$\eta_i$  为折射指数实部引起波相位改变, 产生折射,  $K_i$  为其虚部引起波振幅衰减(或放大), 可以看出有

$$I_i = I_{0i} e^{-\omega \frac{z}{c} 2K_{it}} \quad (16)$$

因此得到

$$\alpha_i = -\frac{\omega}{C} 2K_i \quad (17)$$

并且

$$\epsilon'_i = \eta_i^2 - K_i^2 \quad (18)$$

$$\varepsilon_i'' = 2\eta_i K_i = \frac{\lambda}{2\pi} \eta_i \alpha_i \quad (19)$$

## 计算结果

A. 各向异性光学介质中波传播的波前法线方向与材料特性的关系由标量波法线菲涅耳方程表示, 描写为:

$$\frac{S_x^2}{\hat{V}_p^2 - \hat{V}_x^2} + \frac{S_y^2}{\hat{V}_p^2 - \hat{V}_y^2} + \frac{S_z^2}{\hat{V}_p^2 - \hat{V}_z^2} = 0 \quad (20)$$

其中  $S_x, S_y, S_z$  为波传播方向  $\mathbf{S}$  为在主轴坐标系中的方向余弦。 $\hat{V}_p$  为  $\mathbf{S}$  方向传播的复相速度, 它表示了波的折射和吸收, 其中主速度  $\hat{V}_x, \hat{V}_y, \hat{V}_z$  表示为  $\hat{V}_x^2 = C^2/\hat{\varepsilon}_x, \hat{V}_y^2 = C^2/\hat{\varepsilon}_y, \hat{V}_z^2 = C^2/\hat{\varepsilon}_z, \hat{V}_p^2 = C^2/\hat{\varepsilon}$ , 一般情况下方程(20)中  $\hat{V}_p$  都将有两个根, 表示在  $\mathbf{S}$  方向传播着两个不同相速度的线极化波, 但在奇异轴方向  $\hat{V}_p$  有重根, 满足重根条件;

$$\{S_x^2(\hat{V}_x^2 + \hat{V}_z^2) + S_y^2(\hat{V}_x^2 + \hat{V}_z^2) + S_z^2(V_x^2 + V_z^2)\}^2 - 4(S_x^2\hat{V}_y^2\hat{V}_z^2 + S_y^2\hat{V}_x^2\hat{V}_z^2 + S_z^2\hat{V}_x^2\hat{V}_y^2) = 0 \quad (21)$$

由此得到如下方程组:

$$\left\{ \begin{aligned} & \{S_x^2(V_y'^2 + V_z'^2) + S_y^2(V_x'^2 + V_z'^2) \\ & + S_z^2(V_x'^2 + V_y'^2)\}^2 - 4\{S_x^2(V_y'^2 V_z'^2 \\ & - V_y''^2 V_z''^2) + S_y^2(V_x'^2 V_z'^2 - V_x''^2 V_z''^2) \\ & + S_z^2(V_x'^2 V_y'^2 - V_x''^2 V_y''^2)\} - \{S_x^2(V_y''^2 \\ & + V_z''^2) + S_y^2(V_x''^2 + V_z''^2) + S_z^2(V_x''^2 \\ & + V_y''^2)\}^2 = 0 \end{aligned} \right. \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \{S_x^2(V_y'^2 + V_z'^2) + S_y^2(V_x'^2 + V_z'^2) \\ & + S_z^2(V_x'^2 + V_y'^2)\} \{S_x^2(V_y''^2 + V_z''^2) \\ & + S_y^2(V_x''^2 + V_z''^2) + S_z^2(V_x''^2 + V_y''^2)\} \\ & - 2\{S_x^2(V_z'^2 V_y''^2 + V_z''^2 V_y'^2) \\ & + S_y^2(V_x'^2 V_z''^2 + V_x''^2 V_z'^2) \\ & + S_z^2(V_x'^2 V_y''^2 + V_x''^2 V_y'^2)\} = 0 \end{aligned} \right. \quad (23)$$

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 1 \quad (24)$$

$$V_i'^2 = \frac{\varepsilon_i'}{\varepsilon_i'^2 + \varepsilon_i''^2}, V_i''^2 = \frac{\varepsilon_i''}{\varepsilon_i'^2 + \varepsilon_i''^2} \quad (i = x, y, z)$$

( $\varepsilon_i'$ )<sup>1/2</sup> 已有测定<sup>[6]</sup>, 对 1.06 微米波长的光分别为 1.9327, 1.9241, 1.9102。由(19)式看出  $\varepsilon_i''$  与  $\alpha_i$  的关系。求解以上的 (22)、(23)、

(24) 非线性方程组得奇异轴方向  $\mathbf{S}$  与  $\alpha$  的关系。

B. 从 (11)、(12) 看到, 对于 YAP:Nd 晶体, 在一般使用情况下  $\alpha$  的可能值在一定范围里 (而不是  $0 \sim \infty$ ), 例如对应  $R_1 = 1, R_2 = 5 \sim 50\%$ ,  $l = 5$  厘米, Nd 百分比浓度为 1% 时,  $\alpha$  为  $0.3 \sim 0.08$ , 对应阈值反转粒子数密度  $n_{th}$  为  $10^{18} \sim 2 \times 10^{17}$ , 超过阈值以上的激光输出将随光泵强度提高而提高。吸收系数的极限值由 Nd 粒子浓度及激光使用情况下的发射截面  $\sigma$  决定, 看到在上述条件下对 Nd 粒子数密度为  $2 \times 10^{20}$ /厘米<sup>3</sup> 的 YAP 主轴方向使用的棒, 发射截面  $\sigma$  在  $10^{-19} \sim 10^{-18}$  厘米<sup>2</sup> 之间, 所以  $\alpha_{\max}$  为  $20 \sim 200$ 。

在问题的处理中没有计及激光频率牵引效应, 激光器本征频率偏离激光腔的本征模而靠向激活原子的中心频率, 要带来 ( $\varepsilon_i'$ )<sup>1/2</sup> 的改变。而我们的处理中认为不变。 $\eta_i$  的改变使得在吸收介质里传播的光相速度“减慢”或“变快”。

C. YAP 晶体在吸收系数等于零时, 光轴对称分布于  $axz$  平面的  $z$  轴两边, 与  $z$  成  $Q_N = 37.56^\circ$ , 称为  $N_1, N_2$ , 当  $K_i$  不为零时在  $N_1, N_2$  两边各存在二根奇异轴 (Singular axes)  $N_1', N_1''$  及  $N_2', N_2''$ 。它们的分布由图 1 示出 ( $N_2$  及  $N_2', N_2''$  没有示出)。

由图 1 看出,  $Q, P$  即确定了奇异轴  $N_1'$  的方向余弦, 寻求  $Q, P$  与  $\alpha$  的变化关系, 对

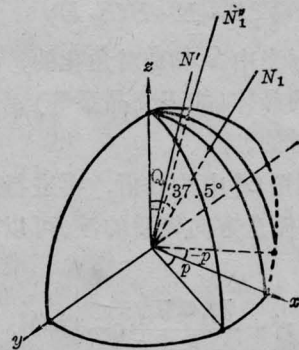


图 1 主轴坐标系 1/4 椭球中的光轴及示出的一根奇异轴  $N_1'$

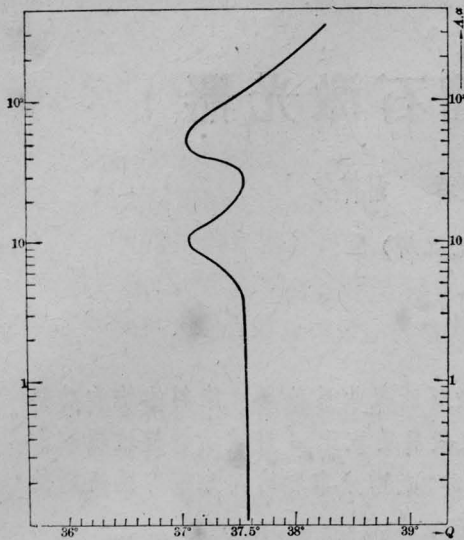


图2  $Q$  随  $\alpha$  的变化关系曲线

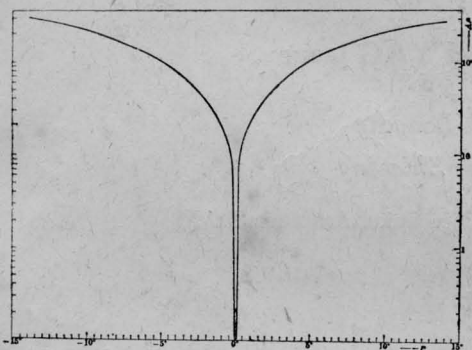


图3 角度  $P$  随  $\alpha$  的变化关系曲线

于具体激光器设计以及研究此类圆偏振激光器的光束特性等都是很需要的。

我们对(22)、(23)、(24)方程组求解, 计

算机数字计算结果示于图2及图3, 其中  $A$  的数值为4.4, 由曲线看出  $\alpha$ - $P$ 、 $\alpha$ - $Q$  的关系。在  $A\alpha < 100$  时  $P \sim 5^\circ$ ,  $Q \sim 37.5^\circ$ ,  $P$  使奇异轴绕主轴  $z$  旋转,  $Q$  的改变使奇异轴绕主轴  $y$  旋转一个角度。由图3看出,  $\lg P \propto \lg A\alpha$ , 由图4看出, 当  $A\alpha < 100$  时(即  $\alpha < \alpha_{\max}$ ),  $Q$  与  $\lg A\alpha$  为高次函数关系而呈现出在光轴附近小幅度( $\Delta Q \sim 0.5^\circ$ )摆动的运动状态。

奇异轴随  $\alpha$  的变化特点说明:

(1) 在设计具体激光器, 加工光轴棒作为激活介质时, 激光器可能获取圆偏振输出的激光束(例如目前一般采用  $l/d \sim 10$ ,  $d$  为棒直径, 允许输出最大偏离轴线方向角为  $\sim 6^\circ$  的光束)。

(2) 利用 YAP:Nd 的这一特性, 可以提供结构十分简单的圆偏振激光器, 无需在外腔插入任何光学元件。

(3) 圆偏振激光器可望在偏振光谱学等方面得到应用。

### 参 考 文 献

- [1] S. Pancharman; *Proc. Ind. Acad. Sci.*, 1955, **A42**, 86.
- [2] 林福成等;《物理学报》, 1978, **27**, No 4, 361.
- [3] W. Voigt; *Ann. Phys.*, 1962, **9**, 367.
- [4] Born and Wolf; *Principles of Optics*, 1964.
- [5] G. A. Massey; *IEEE J. Quant. Electr.*, 1972, **QE-8**, 669.
- [6] J. Junghans *et al.*; *Appl. Opt.*, 1974, **13**, 2793.