

# 观测到的辐射强度到发射系数的 径向分布的变换

——Abel 变换的一种数值解法

丁培柱 潘守甫

(吉林大学原子与分子物理研究所)

**提要:** 本文描述了把观测到的等离子体辐射强度变换成等离子体发射系数径向分布的 Abel 变换的一种新的计算方法。该方法的特点是把 Abel 变换的广义积分变化成通常的积分, 这样就能够使用各种通常的近似积分公式直接从实验数据计算到所要求的数据精度。可以把这种方法应用到在等离子体物理和天体物理中经常遇到的柱对称或球对称的光学薄的等离子体上。

## Transformation of observed radiances into radial distribution of emission coefficients for plasmas — A numerical solution of Abel transformation

Ding Peizhu Pan Shoufu

(Institute of Atomic and Molecular Physics, Jilin University)

**Abstract:** A new calculation method of Abel transformation is described for transforming observed radiances into the radial distribution of emission coefficients of plasmas. The characteristic of this method lies in transforming improper integral into the usual one. Thus various kinds of usual approximate integrals can be used, and the observed data may be calculated directly and conveniently to obtain necessary numerical accuracy. The method may be applied to cylindrically or spherically symmetric and optically thin plasma often encountered in plasma physics and astrophysics.

### 一、引言

在实验室和天体物理中, 经常遇到一些圆柱形或球形对称性的等离子体。对这种等离子体进行光谱测量是针对着一个等离子体

圆盘拍谱的。图 1 表明了这种拍谱的方式。这样拍摄出的谱线的信息是这个圆盘形等离子体各点辐射的一种综合性迭加效应。可是, 我们经常有兴趣的是要知道在等离子体内每一个  $r$  点处的辐射性质。这就要求我们把从

收稿日期: 1980 年 1 月 17 日。

实验上测得的辐射强度(其定义为由等离子体光源在单位时间内经过垂直于  $y$  方向上的单位面积, 在单位频率间隔中通过单位立体角所发射出的能量), 变换成在等离子体内每一点的发射系数(其定义为由等离子体光源的单位体积中, 在单位时间、单位立体角和单位频率间隔内所发射的能量)。这种把辐射强度变化到空间发射系数的变换, 就被称为 Abel 变换。

Hörman<sup>[1]</sup> 和 Brinkman<sup>[2]</sup> 曾给出过这个问题的图形解法。这种解法很冗长, 很不准确, 而且大部分是手工操作。Maecker<sup>[3]</sup> 和 Pearce<sup>[4]</sup> 提出了数值解法。Friedrich<sup>[5]</sup> 提出一种数值解法和图形解法相结合的方法。这些解法的精度都不高。Bockasten<sup>[6]</sup> 发展了一种新的数值解法。他把对于具有此种性质的等离子体所测得的实验辐射强度曲线用分段三阶多项式来逼近, 把它们代到 Abel 变换中, 再定出对于这种逼近的变换系数, 然后求出发射系数。

本文提出一种新的求解光学薄的圆柱形或球形等离子体光谱的 Abel 变换的算法。其特点是把 Abel 变换的广义积分通过作分部积分而变换成通常的积分, 这样就能够使用各种通常的近似积分公式, 很方便地直接从实验数据把发射系数计算到所要求的数据精度。

本文所述的计算方法已被写成 BCY 算法语言, 在 709 (TQ-16) 电子计算机上使用过。

## 二、公式推导及近似算法

图 1 指明了一个平行  $xy$  平面的等离子体圆盘。  $r_0$  为圆柱形或球形等离子体截面半径, 假设发射体相对于  $z$  轴具有圆柱形对称性; 又假设辐射是各向同性的, 且在等离子体中没有吸收。  $I(x)$  表示离开  $yz$  平面的距离为  $x$  处的  $y$  方向上的光谱辐射强度。如果用

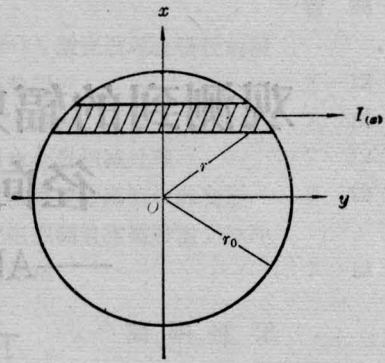


图 1 在 Abel 变换中使用的圆柱对称等离子体的光路图

$\varepsilon(r)$  表示离开原点的距离为  $r$  处的等离子体的发射系数, 那么有 Abel 变换<sup>[7]</sup>

$$\varepsilon(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{r_0} \frac{I'(x) dx}{(x^2 - r^2)^{1/2}} \quad (1)$$

式中  $I(x)$  是由实验测得的值。

考虑广义积分

$$\int_r^{r_0} \frac{I'(x)}{(x^2 - r^2)^{1/2}} dx, \quad (0 \leq r \leq r_0) \quad (2)$$

的数值计算。从物理上考虑,  $I(x)$  是充分光滑的, 且关于  $x=0$  对称, 从而

$$I'(0) = 0. \quad (3)$$

于是当  $0 < r < r_0$  时, 将 (2) 分部积分得

$$\begin{aligned} & \int_r^{r_0} \frac{I'(x)}{(x^2 - r^2)^{1/2}} dx \\ &= \int_r^{r_0} \frac{x}{(x^2 - r^2)^{1/2}} \cdot \frac{I'(x)}{x} dx \\ &= \frac{I'(r_0)}{r_0} \sqrt{r_0^2 - r^2} \\ &+ \int_r^{r_0} \left[ \frac{I'(x)}{x} - I''(x) \right] \\ &\quad \times \frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{x} dx. \end{aligned} \quad (4)$$

上式右端是通常的积分。当  $r=0$  时, 式 (2) 的积分为

$$\int_0^{r_0} \frac{I'(x)}{x} dx \quad (5)$$

由 (3)

$$\begin{aligned} I'(x) &= I''(0)x + \frac{1}{2!} I'''(\theta x)x^2, \\ &0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

从而

$$\frac{I'(x)}{x} \rightarrow I''(0) \quad (x \rightarrow 0+).$$

可见(5)也是通常的积分。

采用 Simpson 公式, 记

$$f(x; r) = \left[ \frac{I'(x)}{x} - I''(x) \right] \frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{x},$$

$$g(x) = \frac{I'(x)}{x}.$$

将  $[0, r_0]$  分成  $2N$  等分, 分点是

$$0 = r_{2N}, r_{2N-1}, r_{2N-2}, \dots,$$

$$r_{2n}, r_{2n-1}, r_{2n-2}, \dots,$$

$$r_2, r_1, r_0.$$

测得的辐射强度  $I(x)$  在这些分点上的值为

$$I(0) = I(r_{2N}), I(r_{2N-1}), I(r_{2N-2}), \dots,$$

$$I(r_{2n}), I(r_{2n-1}), I(r_{2n-2}), \dots,$$

$$I(r_2), I(r_1), I(r_0).$$

记每等分的长度

$$r_{2n-1} - r_{2n} = r_{2n-2} - r_{2n-1} = h.$$

以差商代替微商, 则对  $n=1, 2, \dots, N-1$ , 有

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \int_{r_{2n}}^{r_0} f(x, r_{2n}) dx \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{r_{2j}}^{r_{2j-2}} f(x, r_{2n}) dx \\ &= \frac{h}{3} \left\{ f(r_{2n}, r_{2n}) + f(r_0, r_{2n}) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(r_{2j}, r_{2n}) \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{j=1}^n f(r_{2j-1}, r_{2n}) \right\}, \end{aligned}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} f(r_0, r_{2n}) &= \left\{ \frac{I(r_0) - I(r_1)}{r_0 h} - \frac{I(r_2) + I(r_0) - 2I(r_1)}{h^2} \right\} \frac{\sqrt{r_0^2 - r_{2n}^2}}{r_0}, \\ f(r_{2n}, r_{2n}) &= \left\{ \frac{I(r_{2n-1}) - I(r_{2n})}{r_{2n} \cdot h} - \frac{I(r_{2n-2}) + I(r_{2n}) - 2I(r_{2n-1})}{h^2} \right\} \frac{\sqrt{r_{2n}^2 - r_{2n}^2}}{r_{2n}} = 0, \\ f(r_{2j-1}, r_{2n}) &= \left\{ \frac{I(r_{2j-2}) - I(r_{2j-1})}{r_{2j-1} \cdot h} - \frac{I(r_{2j-2}) + I(r_{2j}) - 2I(r_{2j-1})}{h^2} \right\} \frac{\sqrt{r_{2j-1}^2 - r_{2n}^2}}{r_{2j-1}}, \\ f(r_{2j}, r_{2n}) &= \left\{ \frac{I(r_{2j-1}) - I(r_{2j})}{r_{2j} \cdot h} - \frac{I(r_{2j-1}) + I(r_{2j+1}) - 2I(r_{2j})}{h^2} \right\} \frac{\sqrt{r_{2j}^2 - r_{2n}^2}}{r_{2j}}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

而

$$\begin{aligned} I_{2N} &= \int_0^{r_0} g(x) dx = \sum_{j=1}^N \int_{r_{2j}}^{r_{2j-2}} g(x) dx \\ &= \frac{h}{3} \left\{ g(0) + g(r_0) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} g(r_{2j}) \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{j=1}^N g(r_{2j-1}) \right\}, \end{aligned}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} g(0) &= I''(0) = \frac{2[I(r_{2N-1}) - I(0)]}{h^2}, \\ g(r_0) &= \frac{I(r_0) - I(r_1)}{r_0 \cdot h}, \\ g(r_{2j}) &= \frac{I(r_{2j-1}) - I(r_{2j})}{r_{2j} \cdot h}, \\ g(r_{2j-1}) &= \frac{I(r_{2j-2}) - I(r_{2j-1})}{r_{2j-1} \cdot h}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

于是得

$$\begin{aligned} \varepsilon(r_{2n}) &= -\frac{1}{\pi} \frac{I(r_0) - I(r_1)}{r_0 \cdot h} \sqrt{r_0^2 - r_{2n}^2} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} I_{2n}, \\ &\quad (n=1, 2, \dots, N-1) \quad (8) \\ \varepsilon(0) &= -\frac{1}{\pi} I_{2N}. \end{aligned}$$

如果由上述计算所求得积分精度不够, 可对整个区间采用逐次分半的办法再将分点加倍, 仿上所述, 再按 Simpson 公式进行计算, 继续进行下去, 直至达到所需之精度要求。

### 三、数值结果及讨论

我们以两个人为的例子, 用公式(8)作数

值计算, 来分析讨论我们所得的理论公式。

(1) 设测得的光谱辐射强度  $I(x) = 1600(1-x^2)$ 。

由这样形式的光谱辐射强度可以严格地计算出发射系数  $\varepsilon(r)$ 。近似计算公式得到的数值结果和严格积分得到的结果列在表 1 中。在表 1 中还列出了逐次近似结果与精确

值比较的相对误差。

表 1 中的误差百分比系计算值与精确值之差与精确值之比。

(2) 设测得的光谱辐射强度  $I(x) = 800(1 + \cos \pi x)$ 。

该公式不能严格地求出积分结果。我们把数值结果和相对误差列在表 2 中。

表 1 发射系数  $\varepsilon(r)$  的数值计算结果、精确值和相对误差

$r$	初始计算结果	区间一次分半	区间二次分半	区间三次分半	精确值
0	1131.2474	1086.2829	1058.0361	1041.0925	1018.5916
	11.06%	6.65%	3.87%	2.21%	
0.125	1032.7400	1022.5066	1016.7197	1013.6954	1010.6026
	2.19%	1.18%	0.61%	0.31%	
0.250	988.50332	987.86205	987.16247	986.72949	986.2471
	0.22%	0.16%	0.11%	0.05%	
0.375	935.85102	940.44958	942.44623	943.37466	944.2597
	0.89%	0.404%	0.192%	0.094%	
0.500	867.59599	875.20352	878.74614	880.45573	882.1262
	1.65%	0.785%	0.383%	0.189%	
0.625	777.61279	786.67319	790.97697	793.07472	795.1378
	2.20%	1.06%	0.523%	0.259%	
0.750	655.97624	665.10439	669.47965	671.62193	673.7350
	2.64%	1.28%	0.632%	0.314%	
0.875	478.40819	485.94950	489.58070	491.36286	493.1236
	2.98%	1.45%	0.718%	0.357%	
1	0	0	0	0	0

表 2 发射系数  $\varepsilon(r)$  的数值计算结果和相对误差

$r$	初始计算结果	区间一次分半	区间二次分半	区间三次分半
0	1626.7735	1583.0425	1554.4501	1496.4072
	2.76%	1.84%	3.88%	
0.125	1521.5203	1480.9945	1458.4984	1446.6063
	2.74%	1.54%	0.822%	
0.250	1352.1845	1327.7557	1314.1989	1307.0303
	1.84%	1.03%	0.548%	
0.375	1134.2723	1114.9537	1104.2839	1098.7213
	1.73%	0.969%	0.506%	
0.500	877.74361	859.35366	849.35639	844.14811
	2.14%	1.18%	0.617%	
0.625	606.81610	588.22085	578.28235	573.12891
	3.16%	1.69%	0.899%	
0.750	350.72438	332.75329	323.25657	318.35262
	5.40%	2.94%	1.54%	
0.875	139.48035	124.96276	117.29825	113.33376
	10.41%	6.53%	3.50%	
1	0	0	0	0

表 2 中的误差百分比系相邻两次计算值之差与后次计算值之比。

从上述二例可见，在逐次分半过程中， $\varepsilon(r)$  在  $r=0$  点的精度不及其他点上的精度高(文献 [6] 中的方法也存在这个问题)。可以借助外推法提高  $r=0$  点的精度。将  $\varepsilon(r)$  在  $r=0$  附近作 Taylor 展开

$$\begin{aligned} \varepsilon(r) = & \varepsilon(0) + \varepsilon'(0)r + \frac{1}{2!} \varepsilon''(0)r^2 \\ & + \frac{1}{3!} \varepsilon'''(0)r^3 + \frac{1}{4!} \varepsilon^{(4)}(\theta r)r^4, \\ & 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

我们知道， $\varepsilon(r)$  是偶函数，且在  $r=0$  附近的图象如图 2，故

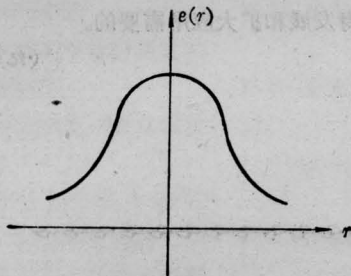


图 2  $\varepsilon(r)$  在  $r=0$  附近的图象

$$\varepsilon'(0) = \varepsilon'''(0) = 0$$

于是

$$\begin{aligned} \varepsilon(r_{2N-2}) = & \varepsilon(0) + \frac{1}{2!} \varepsilon''(0)r_{2N-2}^2 \\ & + \frac{1}{4!} \varepsilon^{(4)}(\theta r_{2N-2})r_{2N-2}^4, \\ & 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

用插商代替  $\varepsilon''(0)$ ，并注意

$$r_{2N-2} = 2h, \quad r_{2N-4} = 4h,$$

即得

$$\begin{aligned} \varepsilon(r_{2N-2}) = & \varepsilon(0) + \frac{1}{2} \{ \varepsilon(r_{2N-4}) \\ & + \varepsilon(0) - 2\varepsilon(r_{2N-2}) \} \\ & + \frac{1}{4!} \varepsilon^{(4)}(\theta \cdot 2h) (2h)^4, \end{aligned}$$

整理后得到

$$\begin{aligned} \varepsilon(0) = & \frac{1}{3} \{ 4\varepsilon(r_{2N-2}) - \varepsilon(r_{2N-4}) \} \\ & - \frac{4}{9} \varepsilon^{(4)}(\theta \cdot 2h) h^4, \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned} \quad (9)$$

我们将逐次分半算得的  $\varepsilon(r_{2N-2})$  和  $\varepsilon(r_{2N-4})$  代入

$$\varepsilon(0) = \frac{1}{3} \{ 4\varepsilon(r_{2N-2}) - \varepsilon(r_{2N-4}) \} \quad (10)$$

中来计算  $\varepsilon(0)$ 。对例(1)和例(2)在逐次分半过程中利用外推公式(10)算得的  $\varepsilon(0)$  值分别列在表 3 和表 4 中。表 3 和表 4 中的误差百分比的定义分别同表 1 和表 2 中的定义。

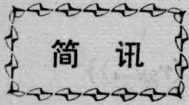
至于临近  $r_0$  各点，不难想象，其精度随

表 3 例(1)中的  $\varepsilon(0)$  的外推结果

	利用(8)算 $\varepsilon_{(0)}$	利用(10)算 $\varepsilon_{(0)}$
一次分半	1131.2474 11.06%	1047.4855 2.84%
二次分半	1086.2829 6.65%	1034.0215 1.51%
三次分半	1058.0361 3.87%	1026.5722 0.78%
四次分半	1041.0925 2.21%	1022.6840 0.40%
精确值	1018.5916	

表 4 例(2)中的  $\varepsilon(0)$  的外推结果

	利用(8)算 $\varepsilon_{(0)}$	利用(10)算 $\varepsilon_{(0)}$
一次分半	1626.7736	1577.9656
二次分半	1583.0425 2.76%	1532.0741 3.00%
三次分半	1554.4501 1.84%	1506.5983 1.69%
四次分半	1496.4072 3.88%	1493.1317 0.90%



## 第五届全国激光学术报告会在南京举行

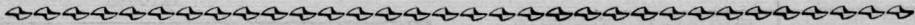
1980年10月9日至16日在南京市举行了第五届全国激光学术报告会。本届会议是由中国电子学会、中国光学学会联合举办的，参加报告会的代表有230人，列席代表约100人。会议筹备中收到的论文有460余篇，选出其中130篇分别在三个分会场进行报告。

从本届学术报告会所宣读的论文来看，反映了我国对激光器件的研究，无论在种类或在质量上都有了可喜的进展。其中常用激光器，如He-Ne激光器、CO<sub>2</sub>激光器等工作寿命都已超过1万小时；激光稳频、噪声等研究也取得了成果，碘和甲烷稳定的He-Ne激光器的稳定性和复现性，经在法国巴黎作国际比对，表明已达到了国际先进水平；就激光器的

结构而言，已研制出一种新管型器件，可希望在不久的将来建立起自动化生产流程大幅度降低器件造价以满足激光技术应用和研究的需要。

报告会期间还举办了“激光展销会”，展出了相当数量的激光器件和元件。由于生产工艺和水平的提高，不少生产激光器件和元件的厂家，对产品的价格作了较大幅度调整，比如常用的He-Ne激光器(250毫米)一套售价仅300元左右，CO<sub>2</sub>激光器也下降了20~25%。据有关专家们估计，随着激光技术的发展，激光器件的价格还会进一步降低，这是符合技术本身发展和扩大应用需要的。

(纪钟)



着分半次数的增多和步长的减小将得到改进。

另外，从上述二例中还可看出，增加区间分半次数可以很快地提高计算精度。事实上，要作到这一点对于近代物理实验室来说是一件很容易的事。这只要把测得的辐射强度作为电子计算机的输入端，直接把测得的数据曲线送入电子计算机中，就可以随意按所需要的精度逐次把区间分半，直至算得的结果达到所需的精度为止。这样作由于计算速度很快，所需的机时是很少的。

本文在计算中曾与李震雷同志进行过多次有益的讨论，作者表示诚挚的感谢。

### 参 考 文 献

- [1] H. Horman; *Z. Physik*, 1935, **97**, 539
- [2] H. Brinkman; "Optische Studie Van de Electriche Lichtboog", Thesis, University of Utrecht, Utrecht, Netherlands (1937), p. 85
- [3] H. Maecker; *Z. Physik*, 1953, **136**, 119; 1954, **139**, 448.
- [4] W. J. Pearce; "Conference on Extremely High Temperatures", edited by H. Fischer and L. C. Mansur (John Wiley & Sons. Inc. N. Y., 1953. p. 723.
- [5] J. Friedrich; *Ann. Physik*, 1959, **3**, 327.
- [6] K. Bockasten; *JOSA*, 1961, **51**, 943.
- [7] H. R. Griem; *Plasma Spectroscopy*, McGraw-HILL Book Company, N. Y., 1964.