波导纤维中光线延迟的计算

殷 宗 敏

（中国科学院西安光机所）

提要：本文提出一种计算波导纤维光线时间延迟的新方法，并给出了各种折射率分布形式纤维的计算结果。

Calculations of ray delay in waveguide optical fibre

Yin Zongmin

(Xian Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: This paper deals with a new method for calculations of ray delay in waveguide fibre, and presents the calculation results for the fibre with various transverse refractive profile.

光线的时间延迟和光能损耗是标志光波导纤维质量的两个主要指标，对光通信系统起着很大的作用。

从光线的传播原理分析可知，当光的传播模不同时，它们传播时与光纤维轴的夹角会不相同，因而光程也不同，光线到达纤维出射端的时间就有差别，我们把沿轴传播的光线和以最大角度传播的光线的这个时间差异叫做光线的时间延迟差，也称为光线的群延迟（这里讨论的是多模纤维情况，关于单模纤维没有这种多模的群延迟，只有数值更小的材料色散和波导色散等引起的单模群延迟，本文不作讨论）。

我们定义光线的时间延迟为：

$$T=\frac{1}{c}\int_s n(r)ds$$

$$=\frac{1}{c}\int_s n(r)\left[1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]^{1/2}dz \qquad (1)$$

式中 $n(r)$ 是纤维折射率沿半径方向的分布；纤维的径向位置为 r，轴向位置为 z，ds 是光线的轨迹元；c 为光速。(1)式也可以写为下述形式[1]：

$$T=\frac{1}{c}\int_s \frac{n^2(r)dr}{[n^2(r)-n_0^2\cos^2\theta]^{1/2}} \qquad (1')$$

式中引入的 θ 角是在 $r=0$ 处，光线与光纤轴的夹角。

对于沿轴传播的光线时间延迟 T_0 为：

$$T_0=\frac{Ln_0}{c} \qquad (2)$$

式中 L 为纤维的长度，n_0 为纤维轴上的折射率。由此可得光线的时间延迟差为：

$$\Delta T=T-T_0$$

$$=\frac{1}{c}\left[\int_s n(r)ds-Ln_0\right] \qquad (3)$$

R. Bouillie 和 A. Cozannet 等[2] 用微扰法解微分方程近似得到 $(dr/dz)^2$，而利用(1)

收稿日期：1979年8月6日。

式取得了几种聚焦型纤维的光线时间延迟差的结果，折射率其它分布形式的光纤没有进行计算。若将 $n(r)$ 直接代入 $(1')$ 式计算是相当繁复的。现在我们采用一种折射率比较法来考虑这个问题。

对于折射率径向分布按 $n(r)=n_0\operatorname{sech}(\sqrt{A}r)$ 规则的聚焦型纤维，从计算中可以知道它的时间延迟差等于零[2]。

$$T=\frac{1}{c}\int_s \frac{n^2(r)dr}{[n^2(r)-n_0^2\cos^2\theta]^{1/2}}$$

$$=\frac{4}{c}\int_0^R \frac{n_0\operatorname{sech}^2(\sqrt{A}r)dr}{[\operatorname{sech}^2(\sqrt{A}r)-\cos^2\theta]^{1/2}}$$

$$=\frac{Ln_0}{c}=T_0 \tag{4}$$

式中 R 和 θ 的关系为 $\cos\theta=n(R)/n_0$, $n(R)$ 是 $r=R$ 处的折射率。我们用记号 $N(r)$ 来表示上述这种折射率的分布。必须指出，这里讨论的均是子午光线，而对于斜光线 (4) 式是不适用的。因为斜光线在这种折射率分布的纤维中的轨迹不是在一个平面内，而是一条空间螺旋曲线。

以 (4) 式的结果代入 (3) 式，即有：

$$\Delta T=\frac{1}{c}\left[\int_s n(r)ds-\int_s N(r)ds\right]$$

$$=\frac{1}{c}\int_s [n(r)-N(r)]ds \tag{5}$$

由于光线在不同折射率分布的纤维中传播的轨迹是不一样的，但是为了继续进行计算，在 (5) 式中我们就作了一个假设，认为这些光线的轨迹是近似相同的。又 $N(r)$ 的分布形式可以写成：

$$N(r)=n_0\operatorname{sech}(\sqrt{A}r)$$

$$=n_0\left(1-\frac{1}{2}Ar^2+\frac{5}{24}A^2r^4-\frac{61}{720}A^3r^6+\cdots\right)$$

同样，我们也可将折射率分布 $n(r)$ 写成这种含有 r 的零次项、平方项和四次项等相加的形式，于是 (5) 式就变为：

$$\Delta T=\frac{1}{c}\left\{\int_s [n(r^0)-N(r^0)]ds+\int_s [n(r^2)-N(r^2)]ds+\int_s [n(r^4)-N(r^4)]ds\right\} \tag{6}$$

式中 $n(r^0)$、$n(r^2)$ 和 $n(r^4)$ 分别表示含有 r 零次、平方和四方的折射率表达式。高次项忽略不计。因此主要知道 (6) 式中各项的积分，就可求得 ΔT 的表示式：

$$\Delta T=\Delta T_0(r^0)+\Delta T_1(r^2)+\Delta T_2(r^4) \tag{7}$$

由于在展开式中 $n(r^0)$ 和 $N(r^0)$ 这两项是取成相等的，故 $\Delta T_0(r^0)=0$，而第二项和第三项的积分在近轴光线时可以用待定系数法求得：

$$\Delta T_1(r^2)=[n(r^2)-N(r^2)]\frac{T_0\theta^2}{n_0Ar^2}$$

$$\Delta T_2(r^2)=[n(r^4)-N(r^4)]\cdot\left(-\frac{3}{8}\cdot\frac{T_0\theta^4}{n_0A^2r^4}\right) \tag{8}$$

由于 $\Delta T_1(r^2)\gg\Delta T_2(r^4)$，所以通常是先考虑 $\Delta T_1(r^2)$ 项，如果该项为零，说明该项对光线的时间延迟差无贡献，然后再考虑 $\Delta T_2(r^4)$ 项。

现在举实例来进行计算：

1) $n=n_0\operatorname{sech}(\sqrt{A}r)$

$$=n_0\left(1-\frac{1}{2}Ar^2+\frac{5}{24}A^2r^4\right)$$

$\Delta T_1=0,\ \Delta T_2=0,\ \Delta T=0$

2) $n=n_0(1-Ar^2)^{1/2}$

$$=n_0\left(1-\frac{1}{2}Ar^2-\frac{1}{8}A^2r^4\right)$$

$\Delta T_1=0,\ \Delta T=\Delta T_2$

$$=\left(-\frac{1}{3}A^2r^4\right)\left(-\frac{3}{8}\cdot\frac{T_0\theta^4}{A^2r^4}\right)$$

$$=\frac{1}{8}T_0\theta^4$$

3) $n=n_0\left(1-\frac{1}{2}Ar^2\right)$ 自聚焦纤维

$\Delta T_1=0,\ \Delta T=\Delta T_2$

$$=\left(-\frac{5}{24}A^2r^4\right)\left(-\frac{3}{8}\cdot\frac{T_0\theta^4}{A^2r^4}\right)$$

$$=\frac{5}{64}T_0\theta^4$$

4) $n=n_0\left(1+\frac{1}{2}Ar^2\right)^{-1}$

$$=n_0\left(1-\frac{1}{2}Ar^2+\frac{1}{4}A^2r^4\right)$$

$\Delta T_1=0,\ \Delta T=\Delta T_2$

$$=\frac{1}{24}A^2r^4\left(-\frac{3}{8}\cdot\frac{T_0\theta^4}{A^2r^4}\right)$$

$$=-\frac{1}{64}T_0\theta^4$$

5) $n=n_0(1+Ar^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$=n_0\left(1-\frac{1}{2}Ar^2+\frac{3}{8}A^2r^4\right)$$

$\Delta T_1=0,\ \Delta T=\Delta T_2$

$$=\frac{1}{6}A^2r^4\left(-\frac{3}{8}\cdot\frac{T_0\theta^4}{A^2r^4}\right)$$

$$=-\frac{1}{16}T_0\theta^4$$

6) $n=n_0$ 多模套层纤维

$$\Delta T=\Delta T_1=\frac{1}{2}Ar^2\left(\frac{T_0\theta^2}{Ar^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}T_0\theta^2$$

7) $n=n_0\left(1+\frac{1}{2}Ar^2\right)$

$$\Delta T=\Delta T_1=Ar^2\left(\frac{T_0\theta^2}{Ar^2}\right)=T_0\theta^2$$

以上是七种折射率分布纤维的光线时间延迟差的计算结果，1～5 种和 R. Bouillie 及 A. Cozannet 等的计算结果相同。第 6 种即为通常的多模套层光纤的分布，第 7 种称为发散光纤，通常不作为长距离光线传输，其光线轨迹为双曲函数形式，所以用(5)式更为近似，故而此处在近轴光线的计算只是比较而已。图 1 表示了这几种折射率分布的曲线，可看出这些曲线是以 $n(r)=n_0\operatorname{sech}(\sqrt{A}r)$ 为基准的，只有这种折射率分布的纤维，其子午光线的时间延迟差为零。至于 ΔT 值出现负值情况，表示沿轴传播的光线反而比有角度的光线延迟大，这里不再赘述。

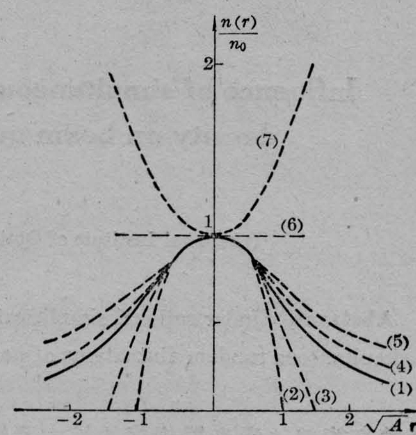

图 1 各种纤维的折射率分布曲线

参 考 文 献

[1] W. B. Allan; Fibre Optics (Plenum Press, London and New York, 1973)

[2] R. Bouillie, A. Cozannet *et al.*; *Appl. Opt.*, 1974, **13**, No. 5, 1045.