

夹层全息技术的分析及原理性试验

李华煜 狄建华

(中国科学院力学研究所)

Analysis of sandwich holography and its feasibility test

Li Huayu, Di Jianhua

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Following problems are discussed in this report: 1) It is proved by analysis that the regulation sensitivity of sandwich holography is much lower than that of double plate holography. 2) The dependence of regulation sensitivity on the parameters of optical path are given. 3) For reference plane wave, it is proved that there is no distortion of image as certain approximate conditions are satisfied. 4) It is indicated that both sandwich and double plate holography have inherent defect of additional error because of the optical inhomogeneities in the substrate of the holographic plates.

夹层全息术 (Sandwich Holography) 是 1974 年提出的一种用于固体变形测量的新方法^[1]。它的特点是: 两次曝光间由于振动等干扰引起的条纹, 可以通过调节夹层全息图相对于参考光的方位几乎全部消除。同时还可以按需要调出任一方向上的背景条纹, 其间距和方向都易于控制。对比双板技术^[2]来说, 夹层全息技术的调节敏感度低得多, 所以可以用较粗糙的调节机构达到与双板技术相同的调节的目的。显然这些特点在风洞测量中是很有用的。中国科学技术大学明海、尹协振、王奎等三同志, 首先提出把夹层全息技术用于风洞测量, 并已取得风洞流场的夹层全息干涉照片^[3]。本文分析了夹层全息技术的原理, 并做了成象畸变分析和原理性试验。

一、夹层全息图背景 条纹族调节原理

为了叙述方便, 这里简述一下文献[1]提出的夹层全息图的录制、再现方法。光路示意图如图 1 所示。实验时在试件未变形前用一对干板作第一次曝光, 在试件变形后用第二对干板作第二次曝光。再现时挑选两块相应于不同物态的干板(例如第一次曝光在位置 I 的干板和第二次曝光在位置 II 的干板)按原样迭合进行再现, 此时若将夹层全息图整体相对于参考光转动, 则全息图在被照物体未变形部分出现可调节的平行背景条纹族。

收稿日期: 1978 年 12 月 29 日。

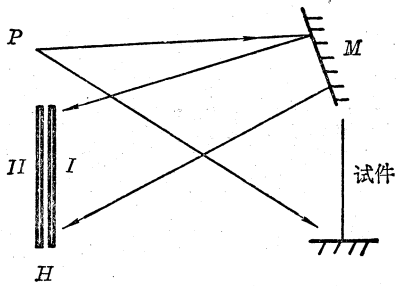


图1 夹层全息照相光路

P—点光源; M—全反射镜; H—全息图

1. 调节原理推导 由于只对背景条纹进行分析, 所以我们令两次曝光时物光完全相同。由于试件可看作无数点光源组成, 按光学分析的一般处理方法, 本节先作点源分析, 然后再考虑点源的组合。

调节原理分析的光路布置参数如图2所示。物光和参考光都是点源球面波, 球心坐标分别是 (x_0, y_0, z_0) , (x_r, y_r, z_r) , 其中物光为 $O = O_0 e^{i\phi_0(x, y)}$, 参考光为 $R = R_0 e^{i\phi_r(x, y)}$ 。夹层全息图再现时仍用原参考光, 但夹层整体绕 y 轴转一小角度 δ (设夹层逆时针转动时 δ 为正)。分析时相当于干板不动, 参考光点源移至 P_c 点作为照明光 $C = C_0 e^{i\phi_c(x, y)}$, P_c 坐标由下式表示:

$$\left. \begin{aligned} y_c &= y_r \\ x_c &= -z_r \sin \delta + x_r \cos \delta \approx -z_r \delta + x_r \\ z_c &= z_r \cos \delta + x_r \sin \delta \approx z_r + x_r \delta \end{aligned} \right\} (1)$$

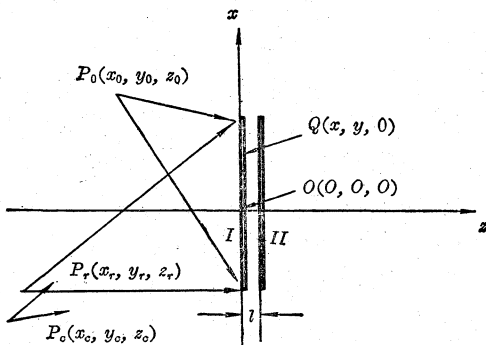


图2 夹层全息光路参数图

为分析简便起见, 由于夹层厚度 l 很小, 可设在夹层全息图范围内 $O_0 \approx R_0 \approx C_0 \approx 1$ 。此

外, 在本节讨论中, 不考虑全息照相片基的影响, 即设其厚度为零。

背景条纹是由两个再现光波 ψ_I 和 ψ_{II} 干涉构成的, 其中 ψ_I 是第一块全息图的再现物光波 (一级衍射) 直透第二块全息图 (零级衍射) 产生的, ψ_{II} 是直透第一块全息图的照明光波 (零级衍射) 照明第二块全息图产生的再现物光波 (一级衍射)。

按一般处理, 全息图 I 在照明光 C 照射下, 其再现光场为:

$$\psi(x, y, 0) = \beta [2 + e^{i(\phi_{01} - \phi_{r1})} + e^{i(\phi_{r1} - \phi_{01})}] e^{i\phi_{01}} \quad (2)$$

为简单起见, 下设透射率系数 $\beta = 1$ 。(2) 式意味着这种处理方法仅能得到全息图 I 平面上的光场分布, 要求取 ψ_I 、 ψ_{II} 时, 必须考虑光波透过全息图 I 后的传播问题。光场的传播一般可用菲涅耳-基尔霍夫衍射公式或瑞利-索末菲理论^[6]等方法解决。但对某些特殊问题, 则可由对边值条件 $\psi(x, y, 0)$ 的分析, 直接写出亥姆霍兹方程:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(x, y, z) = 0$$

的解。式(2)第二项表示再现的物光波, 按文献[5]的分析, 它代表一个球面波的边值条件, 满足它和亥姆霍兹方程的解是一个球面波, 它的球心坐标如下式表示^[4]:

$$\left. \begin{aligned} z_{p1} &= \frac{z_0 z_r z_c}{z_r z_c - z_0 z_c + z_0 z_r} \\ x_{p1} &= \frac{x_0 z_r z_c - x_r z_0 z_c + x_c z_0 z_r}{z_r z_c - z_0 z_c + z_0 z_r} \\ y_{p1} &= \frac{y_0 z_r z_c - y_r z_0 z_c + y_c z_0 z_r}{z_r z_c - z_0 z_c + z_0 z_r} \end{aligned} \right\} (3)$$

把关系式(1)代入(3), 并且由于傍轴近似和 δ 很小的假定, $\frac{x_r \delta}{z_r} \ll 1$, 略去 $\left(\frac{x_r \delta}{z_r}\right)^2$ 以上的高阶小量得到:

$$\left. \begin{aligned} z_{p1} &= z_0 \left(1 + \frac{z_0}{z_r} \frac{x_r}{z_r} \delta\right) \\ x_{p1} &= x_0 \left[1 - \frac{z_0}{x_0} \delta + \frac{z_0}{z_r} \left(1 - \frac{x_r}{x_0}\right) \frac{x_r}{z_r} \delta\right] \\ y_{p1} &= y_0 \left[1 + \frac{z_0}{z_r} \left(1 - \frac{y_r}{y_0}\right) \frac{x_r}{z_r} \delta\right] \end{aligned} \right\} (4)$$

这个球面波传播到全息图 II 平面的光场分布为(即它透过全息图 II 的零级衍射):

$$\psi_I = 2e^{ik \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2xx_{p1} - 2yy_{p1}) / (l - z_{p1}) \right]} \quad (5)$$

上式在计算中略去一些无关紧要的常数位相。

全息图 I 的零级衍射以式 (2) 的首项为代表, 它也是个点源球面波, 其球心在 (x_0, y_0, z_0) 。它照射全息图 II 得到的一级衍射, 即为再现物波 ψ_{II} 。用类似的分析得知, ψ_{II} 也是一个球面波, 其球心坐标如下式所示:

$$\left. \begin{aligned} z_{p2} &= z_0 \left(1 + \frac{z_0}{z_r} \frac{x_r}{z_r} \delta \right) \\ x_{p2} &= x_0 \left[1 - \frac{z_0}{x_0} \delta + \frac{z_0}{z_r} \left(1 - \frac{x_r}{x_0} \right) \frac{x_r}{z_r} \delta \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{z_0}{z_r} \right) \frac{l}{x_0} \delta \right] \\ y_{p2} &= y_0 \left[1 + \frac{z_0}{z_r} \left(1 - \frac{y_r}{y_0} \right) \frac{x_r}{z_r} \delta \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

此球面波在全息图 II 平面的光场分布为

$$\psi_{II} = 2e^{ik \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2xx_{p2} - 2yy_{p2}) / (l - z_{p2}) \right]} \quad (7)$$

上式在计算中略去 $\left(\frac{x_r}{z_r} \delta \right)^2$ 、 $\left(\frac{l}{z_0} \right)^2$ 、 $\left(\frac{l}{z_r} \right)^2$ 、 $\left(\frac{l}{x_0} \right)^2$ 、 $\left(\frac{l}{x_r} \right)^2$ 等以上的高阶小量。无关紧要的常数位相项同样也被略去。 ψ_I 和 ψ_{II} 干涉得到的光强分布为

$$\begin{aligned} \psi_f &= |\psi_I + \psi_{II}|^2 \\ &= 8 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} xF \right) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

式中

$$F = \frac{\left(\frac{z_0}{z_r} - 1 \right) l \delta}{l - z_0 - \frac{z_0^2}{z_r^2} x_r \delta} \quad (9)$$

(8) 式表明再现出的全息干涉图的光强分布是平行于 y 轴的直线条纹族, 其间距为

$$d = \frac{l - z_0 - \frac{z_0^2}{z_r^2} x_r \delta}{\left(\frac{z_0}{z_r} - 1 \right) l} \frac{\lambda}{\delta} \quad (10)$$

如果粗略一点, 可以认为:

$$d \approx \frac{z_0}{\left(1 - \frac{z_0}{z_r} \right) l} \frac{\lambda}{\delta} \quad (11)$$

以上分析了夹层全息图绕 y 轴旋转的情况, 由于 x 、 y 的对称性, 夹层全息图绕 x 轴旋转的情况自然有相似的结论。这样我们就证明了夹层全息技术的调节特性的存在。

2. 几点结论

(1) 由式 (8)、(9) 可见, 背景条纹的分布与物点的 x_0 、 y_0 坐标无关, 而仅与 z_0 有关。因此若物体是个平面物体, 此平面垂直于 z 轴, 此时点源组合产生的干涉条纹仍由式 (8) 表示。也就是说, 在此条件下, 也仅在此条件下, 夹层全息图能得到清晰的背景条纹。如物体不是个平面物体, 由于点源有不同的 z_0 值, 干涉条纹必将模糊, 如果 z_0 差别较大, 干涉条纹可能变得不可辨认。这将是文献 [1] 方法的局限性之一。

(2) 对比双板全息技术, 夹层全息技术的特点是对旋转调节较不敏感, 其原因在于双板全息技术是两块全息图独立调节 (因此对调节非常敏感)。夹层全息图则是两块全息图整体地调节。特别是式 (11) 中有个因子 $\frac{z_0}{\left(1 - \frac{z_0}{z_r} \right) l}$ 很大 (通常大于 100), 因此夹层全息图对调节是不敏感的。从式 (11) 可见, 背景条纹密度和调节转角 δ 、夹层厚度 l 都成正比。

(3) 从式 (11) 可见, 调节的敏感程度和光路布置的参数有关。当 $z_r = z_0$ 时, $d = \infty$, 此时夹层全息调不出条纹, 调节特性丧失。此时两个象点坐标完全重合, 因此不会产生条纹。当物距 z_0 一定时, 调节的敏感程度随 $\left| 1 - \frac{z_0}{z_r} \right|$ 值的增大而增加。

(4) 对于平面波参考光情况, 如其传播方向与 z 轴夹 θ 角, 利用文献 [4] p. 46 的结果, 用类似的分析方法可得性质完全相同的结果。其中条纹间距的表达式为:

$$d = \frac{-z_0 + l}{l} \frac{1}{\cos \theta} \frac{\lambda}{\delta} \quad (12)$$

3. 原理性试验

物光、参考光都是离轴的，夹角约为 9° ，夹层厚度 $l=10$ 毫米。

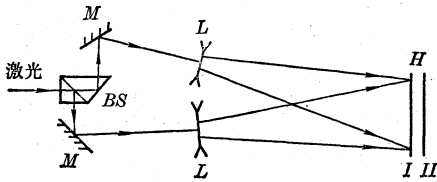
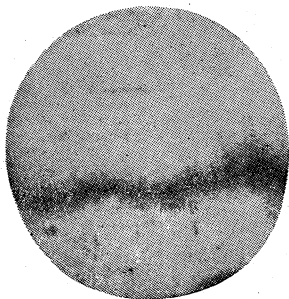
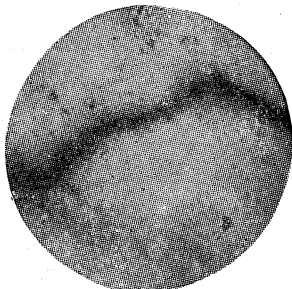


图3 原理性试验光路布置
BS—分光器；M—全反镜；L—透镜；H—夹层全息图

① 物光、参考光都是点光源， $z_0=z_r=1640$ 毫米条件下，全息图在初始位置再现时，可见初始条纹1条（见照片1），转动全息图 3.4° 后再现，仍然只见1条条纹（照片2）。在转动更大角度时，只见条纹移动，但始终不见条纹增加。这证明理论结果： $d=\infty$ ，夹层全息图的调节特性丧失。

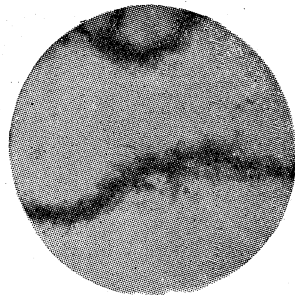


照片 1
 $z_0=z_r=1640$ 毫米初始位置再现照片

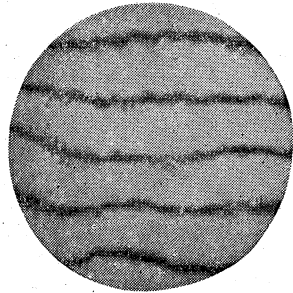


照片 2
 $z_0=z_r=1640$ 毫米转动 3.4° 再现照片

② 物光、参考光都是点光源， $z_0=1640$ 毫米、 $z_r=1350$ 毫米条件下，全息图在初始位置再现时，可见初始条纹两条（照片3），转动全息图可见条纹慢慢增加，在转动 3.4° 后再再现，可见条纹5条（照片4）。

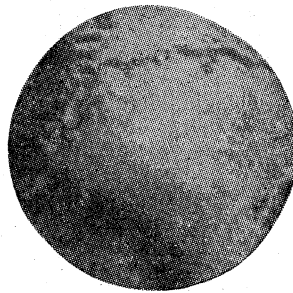


照片 3
 $z_0=1640$ 毫米、 $z_r=1350$ 毫米
初始位置再现照片

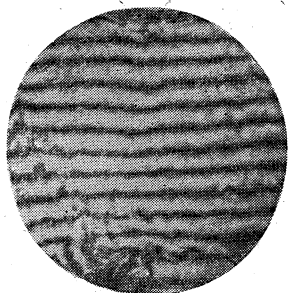


照片 4
 $z_0=1640$ 毫米、 $z_r=1350$ 毫米
转动 3.4° 再现照片

③ 物光为点光源，参考光为平面波， $z_0=1640$ 毫米条件下，全息图在初始位置再现可见初始条纹两条（照片5），转动全息图亦见条纹增加，但较多，至转动 3.4° 时，可见条纹约13条（照片6）。



照片 5
 $z_0=1640$ 毫米、 $z_r=\infty$ 初始位置再现照片



照片 6

$z_0=1640$ 毫米、 $z_r=\infty$ 转动 3.4° 再现照片

实验③的调节敏感性较实验②为高，其原因可由条纹间距表达式得到解释，因为在实验②的情况下， $\left|1-\frac{z_0}{z_r}\right|=0.2$ ，实验③的情况下， $\left|1-\frac{z_0}{z_r}\right|\approx 1$ 。

这些实验初步说明上节得到的结论。

必须指出，多次实验都发现有弯曲的初始条纹，说明全息照相片基的光学不均匀性（或者还加上药膜不均匀、收缩等影响），对光波有了附加的调制。在被测量小于一个波长的情况下，必须想办法消除上述影响，这一技术才能应用。这是夹层全息技术，并且也是双板全息技术的根本缺陷所在。

二、风洞测量用的两种基本光路

风洞测量中，一般试验段比全息干板大很多，在非漫射照明的情况下，物光可理想化为会聚的球面波，其球心在全息干板之后。（漫射照明情况，可用上节的分析）。参考光用平面波比较方便，因为再现时在另外的地方，用平面波再现时只需二维调准，而点光源则需三维调准。下面分析两种典型的光路。

这两种光路可用上节类似的方法作分析，分析结果表明，调节原理与上节完全类似，而条纹间距表达式仅在形式上略有改变。

图4光路中，物光为会聚的球面波，球心坐标 $(0, 0, z_0)$ （下面结果可推广至球心坐标

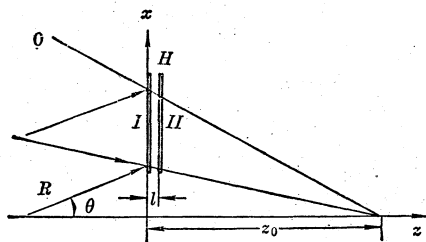


图4 风洞用夹层全息光路(1)

为 (x_0, y_0, z_0) 的情况)，参考光为与 z 轴夹角 θ 的平面波，条纹间距表达式为：

$$d = \frac{z_0 - l}{l} \frac{1}{\cos \theta} \frac{\lambda}{\delta} \quad (13)$$

图5光路中，物光和参考光都是球面波，但物光是会聚的球面波，球心在 (x_0, y_0, z_0) ，条纹间距表达式为

$$d = \frac{z_0 - l - \left(\frac{z_0}{z_r}\right)^2 x_r \delta}{\left(1 - \frac{z_0}{z_r}\right) l} \frac{\lambda}{\delta} \quad (14)$$

附带报告一个特殊情况，当物光、参考光都是平面波时，分析表明，夹层转动调不出背景条纹，此时 $d = \infty$ 。

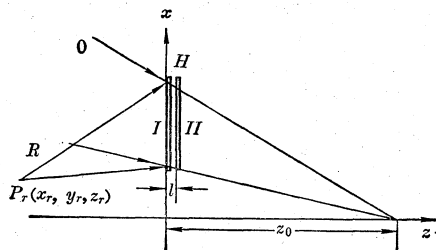


图5 风洞用夹层全息光路(2)

三、畸变分析

由于夹层全息图再现时，全息图象对参考光有转动，再现成象畸变情况自然就会引起人们的关切。本文从象点位置出发分析成象的畸变情况。

(1) 由于本文分析使用了傍轴近似和 δ 较小的假定，因此在满足下列条件时，本文分析才能保持有效：

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{8} \left[\frac{x^2 + y^2}{(z - z_0)^2} \right]^2 \ll 1 \\ \delta \ll 1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

如果 $\ll 1$ 条件用 < 0.01 来代替, 并设照相时光团对称于原点, 光团直径 50 毫米, 即 $(x^2 + y^2)_{\max} = 25$ 毫米²; 此外并设 $(z - z_0)^2 \approx z_0^2$, 条件(15)化为:

$$\left. \begin{aligned} z_0 > 47 \text{ 毫米} \\ \delta < 0.1 (\text{合 } 6^\circ) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

这些条件在实验中是易于满足的。

(2) 平面波参考光条件下的畸变分析, 在参考光为与 z 轴夹角 θ 的平面波的条件下, 物点坐标为 (x_0, y_0, z_0) 时 ($z_0 < 0$), 夹层全息图绕 y 轴转动 δ 角再现时, 出现两个象点, 其坐标在转动后的坐标中分别为

$$\begin{aligned} &(\delta z_0 \cos \theta + x_0, y_0, z_0), \\ &[x_0 - \delta(l - z_0) \cos \theta, y_0, z_0], \end{aligned}$$

这个结果表明, 照相时平行于全息图的一切物点, 在上述再现情况下, 其相应的象点仅是在转动后的 x 轴方向移动相同的距离。于是可得这样的结论: 平行于全息图的平面物体, 再现时没有畸变。

但是, 由于两个象点的出现, 使再现物象有轻微的双象出现。这种轻微的双象情况和一般有限条纹干涉图的双象情况相同, 不易被察觉。

现在再考虑 z 方向的一个线段, 其端点坐标 (x_0, y_0, z_0) 、 $(x_0, y_0, z_0 + \Delta z)$, 该线段长 Δz , 象长 L_i 可由象点坐标求得:

$$\begin{aligned} L_i &= \{ \Delta z^2 + [(z_0 + \Delta z) \delta (\cos \theta - 1) \\ &\quad - z_0 \delta (\cos \theta - 1)]^2 \}^{1/2} \\ &= \Delta z [1 + \delta^2 (\cos \theta - 1)^2]^{1/2} \approx \Delta z \end{aligned}$$

因此, 在满足近似所要求的条件下, z 方向亦没有畸变。

(3) 球面波参考光条件下的畸变分析, 参考光是在点 (x_r, y_r, z_r) 发出的球面波的条件下, 在夹层绕 y 轴转 δ 角再现时, 作下列分析:

(a) y 方向的畸变: 考虑 y 方向一线段,

其端点为 (x_0, y_0, z_0) 、 $(x_0, y_0 + \Delta y, z_0)$, 再现时出现两个象点, 其坐标可由式(4)、(6)计算。此时物长 $L_0 = \Delta y$, 象长可由象点坐标算出:

$$L_i = \Delta y \left[1 + \frac{z_0}{z_r} \frac{x_r}{z_r} \delta \right],$$

放大率 η 为:

$$\eta_y = L_i / L_0 = 1 + \frac{z_0}{z_r} \frac{x_r}{z_r} \delta = f_1(z_0).$$

由此可见, 若物体为平面物体 $z = \text{const}$, 则 y 方向设有畸变。如果不是平面物体, y 方向的放大率随 z_0 变化, 产生畸变。

(b) x 方向的畸变: 用同样的方式考虑, 得到

$$\eta_x = 1 + \frac{z_0}{z_r} \frac{x_r}{z_r} \delta, \quad \eta_x = \eta_y,$$

得到同样的结论。

(c) z 方向的畸变: 考虑轴上一线段, 其端点为 $(0, 0, z_0)$ 、 $(0, 0, z_0 + \Delta z)$, 由于坐标原点可任意选取, 这样的考虑并没有丧失其一般性。此时象长为

$$\begin{aligned} L_i &= \left[\Delta z^2 \left(1 + \frac{x_r^2}{z_r^2} \right)^2 \delta^2 + \Delta z^2 \left(\frac{x_r}{z_r} \frac{y_r}{z_r} \right)^2 \delta^2 \right. \\ &\quad \left. + \Delta z^2 \left(1 + 2 \frac{z_0}{z_r} \frac{x_r}{z_r} \delta + \frac{\Delta z}{z_r} \frac{x_r}{z_r} \delta \right)^2 \right]^{1/2} \\ &\approx \Delta z \left[1 + 2 \frac{z_0}{z_r} \frac{x_r}{z_r} \delta + \frac{\Delta z}{z_r} \frac{x_r}{z_r} \delta \right] \\ &= f_2(z_0, \Delta z) \end{aligned}$$

放大率

$$\eta_z = 1 + 2 \frac{z_0}{z_r} \frac{x_r}{z_r} \delta + \frac{\Delta z}{z_r} \frac{x_r}{z_r} \delta,$$

因此 z 方向是肯定有畸变的。

参 考 文 献

- [1] N. Abramson; *Appl. Opt.*, 1974, **13**, 2019.
- [2] G. Havener et al.; *Opto-Electr.*, 1972, **4**, No. 4, 349.
- [3] 明海等; 《中国科学技术大学学报》.
- [4] H. M. Smith; 《全息学原理》, 科学出版社(1972).
- [5] R. W. Meier; *JOSA*, 1965, **55**, 987.
- [6] J. W. Goodman; 《傅里叶光学导论》, 科学出版社(1976).