

# 不稳定腔的频谱分析(续)

王 维 瑞

(中国科学院上海光机所)

## Frequency spectrum analysis of an unstable cavity (continued)

Wang Weirui

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Characteristics of an unstable cavity filled with inhomogeneous media were studied by analyzing the frequency spectrum using an approximate method for thin samples. Frequency spectrum analysis and numerical calculations were made for some media with inhomogeneous distribution to a certain degree, useful results were obtained.

### 一、具有非均匀介质不稳定腔的频谱分析

根据[1]可知,光在不稳定腔中的振荡可以等效于在一个透镜序列中的传输问题来进行处理。具有非均匀介质的不稳定腔也可以用这样的方法来处理,所不同的是把[1]中的光阑函数

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{l}{2}, |y| \leq \frac{l}{2} \\ 0 & |x| > \frac{l}{2}, |y| > \frac{l}{2} \end{cases} \quad (1)$$

换成广义光阑函数

$$P(x, y) = T(x, y)P(x, y)e^{i\frac{2\pi}{\lambda}W(x, y)} \quad (2)$$

就可以了。其中  $l$  为光阑横向尺寸,  $\lambda$  为单色光波长,  $T(x, y)$  为振幅透过率函数,  $W(x, y)$  为光程偏差函数,  $P(x, y)$  同(1)式一样,  $x, y$  为光阑函数的横坐标。除上述光阑函数与[1]中不一样外,其它假定条件都与

[1]相同。如果采用薄样品近似,把振幅透过率函数  $T$  等效于增益分布函数,把光程偏差函数等效于由于介质不均匀而产生的光程偏差函数,这样就可以对非均匀介质的不稳定腔进行频谱分析了。

根据[2]可知,象差和一般透过率函数的出现并不会影响相干传递函数的通带带宽,而限制这个通带宽仅是出射孔径有限大小所造成的,也就是说取决于函数  $P(x, y)$ 。由此根据[1]的结果可以得出在有非均匀介质的不稳定腔中会聚波仍然不能存在。因此,下面我们仅对放大率  $|M| < 1$  的情况进行分析,从而得出具有非均匀介质的不稳定腔的特性。

同样,根据[1]中给出的不稳定腔自洽面上光路往返一次的频谱自洽条件仍为:

$$G_{in} = \gamma G_{in-1} \quad (3)$$

$G_{in}$  和  $G_{in-1}$  与  $\gamma$  的意义同[1]。

我们只要将广义光阑函数(2)代替[1]中

收稿日期: 1978年12月4日。

的光阑函数, 并用  $|M| < 1$  就可以得到第  $n$  面和  $n-1$  面上的谱分别为:

$$\begin{aligned}
 G_{in} &= (K\lambda^2 d_i^2)^n P(-\lambda d_i f_x, -\lambda d_i f_y) \\
 &\times \prod_{m=1}^n T(-\lambda d_i f_x M^{m-1}, -\lambda d_i f_y M^{m-1}) \\
 &\times e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \sum_{m=1}^n W(-\lambda d_i f_x M^{m-1}, -\lambda d_i f_y M^{m-1})} \\
 &\times F(M^n f_x, M^n f_y); \\
 G_{in-1} &= (K\lambda^2 d_i^2)^{n-1} P(-\lambda d_i f_x, -\lambda d_i f_y) \\
 &\times \prod_{m=1}^{n-1} T(-\lambda d_i f_x M^{m-1}, -\lambda d_i f_y M^{m-1}) \\
 &\times e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \sum_{m=1}^{n-1} W(-\lambda d_i f_x M^{m-1}, -\lambda d_i f_y M^{m-1})} \\
 &\times F(M^{n-1} f_x, M^{n-1} f_y); \quad (4)
 \end{aligned}$$

这里用的参数符号同[1]。

要使输出频谱  $G_{in}$  和  $G_{in-1}$  满足自洽条件(3), 必须满足如下条件:

1. 频谱分布函数  $F$  要相似。从[1]中不难得出:

$$F \sim f_x^j f_y^k \quad (j, k=0, 1, 2, \dots)$$

2. 传递函数要相等。这里传递函数由两部分乘积构成。其中带宽函数是一样的。这样另外两部分就要相等, 这就必须使  $n$  趋近于无穷大才行, 亦即  $n$  足够大才行。

根据上面两个条件, 我们可以得出满足自洽条件的频谱为:

$$\begin{aligned}
 G_{jk} &= C_{jk} P(-\lambda d_i f_x, -\lambda d_i f_y) \\
 &\times \prod_{m=1}^{\infty} T(-\lambda d_i f_x M^{m-1}, -\lambda d_i f_y M^{m-1}) \\
 &\times e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} W(-\lambda d_i f_x M^{m-1}, -\lambda d_i f_y M^{m-1})} \\
 &\times f_x^j f_y^k \quad (5)
 \end{aligned}$$

这里  $C_{jk}$  是复常数因子。从(5)式中可以看出来, 要想得到稳定的模式分布, 一定要求

$$\prod_{m=1}^{\infty} T(-\lambda d_i f_x M^{m-1}, -\lambda d_i f_y M^{m-1})$$

和

$$\sum_{m=1}^{\infty} W(-\lambda d_i f_x M^{m-1}, -\lambda d_i f_y M^{m-1})$$

两项收敛才行。

如果要求得在自洽共轭面上的场分布, 只要再做一次傅里叶反演积分即可<sup>[2]</sup>:

$$\begin{aligned}
 U_{jk} &= \iint_{-\infty}^{+\infty} C_{jk} P(-\lambda d_i f_x, -\lambda d_i f_y) \\
 &\times \prod_{m=1}^{\infty} T(-\lambda d_i f_x M^{m-1}, -\lambda d_i f_y M^{m-1}) \\
 &\times e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} W(-\lambda d_i f_x M^{m-1}, -\lambda d_i f_y M^{m-1})} \\
 &\times f_x^j f_y^k e^{i 2\pi (f_x x + f_y y)} df_x df_y \quad (6)
 \end{aligned}$$

这里  $x, y$  是自洽面上的坐标。

我们还可以得到对于  $(j, k)$  的  $\gamma$  即

$$\gamma_{jk} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{in}}{G_{in-1}} = K\lambda^2 d_i^2 M^{j+k} \quad (7)$$

这和[1]中的结果一样。因此, 具有非均匀介质的不稳定腔的损耗及纵模特性和空腔情况是一样的。

## 二、具有非均匀介质的望远镜腔的模式计算和结果讨论

### 1. 等效光路

如图1(a)所示, 它是望远镜腔的示意图。 $L_1$  和  $L_2$  是反射镜,  $L_1$  的曲率半径为  $R_1$ , 是凹的,  $L_2$  的曲率半径为  $R_2$ , 是凸的, 它们有共同的焦点  $O$ 。在腔中充满介质, 介质的横向尺寸为  $l$ , 腔长为  $L$ ,  $L_1$  和  $L_2$  的横向尺寸足够大。

根据[3]不难画出图1(a)望远镜腔光路往返传输的等效光路图1(b)。

图1(b)中  $O$  和  $O'$  为共焦焦点, 光路往返一次相当于点  $O$  经过  $L_1$  和  $L_2$  成象一次, 而经过介质两次。另外, 因  $L_1$  和  $L_2$  足够大, 所以在光路中有效光阑尺寸由工作物质的横向尺寸  $l$  确定。我们假定有效光阑在  $L_1$  上, 光阑的横向坐标为  $x$  (这里仅对一维情况进行讨论)。如果采用薄样品近似, 则由于介质增益和传输不均匀而在  $L_1$  上形成的广义光阑函数为

$$P(x) = P(x) T(x) e^{i 2 \frac{2\pi}{\lambda} W(x)} \quad (8)$$

这里

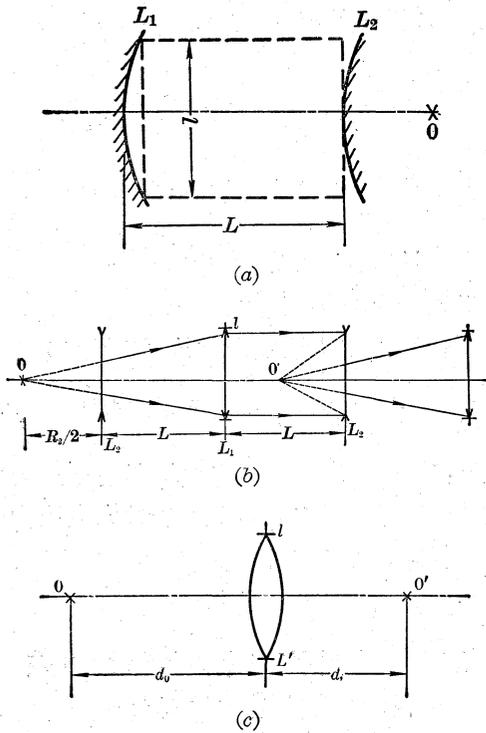


图 1

(a) 望远镜腔 (b) 等效光路图  
(c) 简单透镜成像

$$P(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{l}{2} \\ 0 & |x| > \frac{l}{2} \end{cases}$$

$T(x)$  为增益分布函数,  $W$  为介质不均匀形成的光程偏差函数。 $W$  前面的一个系数 2 是因为光束往返一次经过两次不均匀介质所致。 $W(x)$  为光经过一次介质时光程偏差函数。

根据[3]可以得出望远镜腔放大倍率

$$\text{而 } \left. \begin{aligned} M &= \frac{R_2}{R_1} \\ L &= \frac{R_1 - R_2}{2} \\ R_1 &= \frac{2L}{1 - M} \\ R_2 &= \frac{2ML}{1 - M} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$O$  点与  $L_1$  的距离为  $R_1/2$ ,  $O$  与  $O'$  之间的距

离为  $2L$ 。

我们把图 1(b) 的光路等效于一个简单透镜成像, 如图 1(c), 其中  $d_0 + d_i = L$ ,  $\frac{d_i}{d_0} = M$ 。由此可得出:

$$\left. \begin{aligned} d_i &= \frac{R_1}{2} = \frac{LM}{1 - M} \\ d_0 &= \frac{R_2}{2} = \frac{L}{1 - M} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

另外, 在等效透镜  $L'$  上有一个等效光阑, 光阑的横向坐标为  $x$ , 尺寸为  $l$ 。光阑函数为  $P(x)$  即式(8)的形式。

根据 [2] 可得在图 1(c) 情况的截止频率为:

$$f_{0x} = \pm \frac{l}{2\lambda d_i} = \pm \frac{l(1 - M)}{2LM\lambda} \quad (11)$$

## 2. 关于光束偏差函数

在薄样品近似的情况下, 铍玻璃介质的折射率变化可以近似为:

$$\Delta n = Ax^2 - Bx^4 + Cx^6 \quad (12)$$

其中  $\Delta n$  为折射率变化,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  为常数,  $x$  为介质横向坐标。

把 (12) 式的结果用在我们所讨论的情况, 光程偏差函数为:

$$W(x) = L(Ax^2 - Bx^4 + Cx^6) \quad (13)$$

根据 (9)、(10)、(11) 式, 我们可以得到

$$W(-\lambda d_i f_x) = L \left[ A \left( \frac{l}{2} \right)^2 \bar{f}_x^2 - B \left( \frac{l}{2} \right)^4 \bar{f}_x^4 + C \left( \frac{l}{2} \right)^6 \bar{f}_x^6 \right]$$

其中  $\bar{f}_x$  为归一化频率,  $\bar{f}_x = \frac{f_x}{f_{0x}}$ 。

应用上面结果, 并用无穷等比级数求和公式我们可以求得

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} W(-\lambda d_i f_x M^{m-1}) \\ &= L \left[ A \left( \frac{l}{2} \right)^2 \bar{f}_x^2 / (1 - M^2) - B \left( \frac{l}{2} \right)^4 \bar{f}_x^4 / (1 - M^4) + C \left( \frac{l}{2} \right)^6 \bar{f}_x^6 / (1 - M^6) \right] \quad (14) \end{aligned}$$

这就是我们所要用的光程偏差函数和公式。

3. 根据文献 [4], 我们取增益分布函数为:

$$T(x) = e^{\alpha \left(\frac{2x}{l}\right)^2}$$

形式, 其中  $\alpha$  为常数。

同样可得:

$$\prod_{m=1}^{\infty} T(-\lambda d_i f_x M^{m-1}) = e^{\alpha \bar{f}_x^2 / (1-M^2)} \quad (15)$$

4. 在 (2)、(3) 两种情况下, 望远镜腔在共轭自洽面上的模式场分布计算公式:

将 (14)、(15) 两式代入 (8) 式, 并用归一化频率, 而且取一维形成, 注意两者的  $W$  相差一个因子 2。我们可以得到在自洽共轭面上的场振幅分布为:

$$\begin{aligned} U_j(x) = & C_j f_{0x}^{j+1} \int_{-1}^{+1} \bar{f}_x^j \exp\left\{[\alpha \bar{f}_x^2 / (1-M^2)]\right. \\ & + i \frac{4\pi L}{\lambda} \left[ A \left(\frac{l}{2}\right)^2 \bar{f}_x^2 / (1-M^2) \right. \\ & - B \left(\frac{l}{2}\right)^4 \bar{f}_x^4 / (1-M^4) + \left(\frac{l}{2}\right)^6 \bar{f}_x^6 / (1-M^6) \left. \right] \\ & \left. + i 2\pi f_{0x} \bar{f}_x x \right\} d\bar{f}_x \quad (16) \end{aligned}$$

这里  $x$  是在共轭自洽面上的坐标。

以

$$\bar{U}_j(x) = \frac{U_j(x)}{U_j(0)} \quad (17)$$

代表在共轭面上模式归一化振幅分布。下面我们 will 用此公式来进行模式振幅分布计算。

### 5. 计算结果及讨论

因为一般在  $M$  比 1 小得较多的情况下,  $j \neq 0$  的高次模损耗较大, 只有当  $|M|$  接近于 1 时, 两种情况损耗才相差不多。  $j=0$  损耗最小, 腔中的主模式是  $j=0$  的情况。为了计算简化, 而又有一定的实际意义, 我们仅对  $j=0$  的情况进行计算和讨论, 已经有一定的实际意义。

另外, 在光程偏差函数中有一项  $\Delta x^2$  项, 该项仅对不稳定腔的共轭象点位置有影响, 如果我们认为适当选择腔长和腔镜曲率, 把此项考虑进去了, 这样就可以认为光阑函数中光程偏差函数的  $\Delta x^2$  项中  $A=0$ , 这并不影

响我们所讨论的结果。

我们利用 TQ-16 计算机辛甫生积分库过程, 保持绝对误差在 1% 的情况, 用公式 (16)、(17) 计算在  $L=1$  米,  $l=7$  厘米,  $\lambda=1.06$  微米几种不同情况下在自洽共轭面上从零到  $x$  的相对振幅  $\bar{U}_0(x)$  和相对相位  $\varphi_0(x)$ 。下面分几种情况来进行讨论。

(1)  $\alpha=0$  而  $A=B=C=0$  空腔情况

首先, 我们根据 [1] 中给出的 (0, 0) 模式的结果可知, 振幅第一零点位置满足:

$$\frac{\pi l}{\lambda d_i} x = \pi$$

因此, 在共轭面上极大的宽度为:

$$\Delta x = \frac{2\lambda d_i}{l} = \frac{2\lambda LM}{(1-M)l}$$

因此, 在孔径为  $l$  时输出光束发散角为:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta x}{R_2/2} = \frac{2\lambda}{l} \quad (18)$$

由 (18) 式可以看出, 对于空腔情况,  $j=0$  主模的发散角不随  $M$  而变, 而在我们这种情况  $\Delta\theta=0.03$  毫弧度。

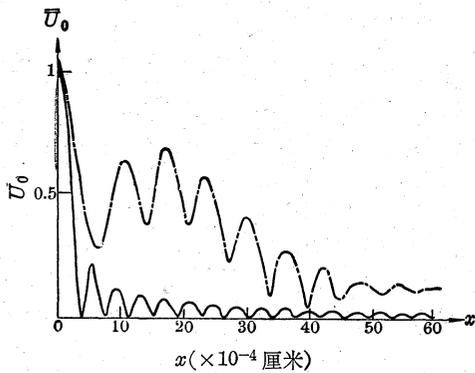
(2)  $\alpha=0$ ,  $A=0$ ,  $B=6 \times 10^{-8}$ ,  $C=7.5 \times 10^{-9}$  情况, 给出一组相对振幅图形, 见图 2, 其中  $M$  分别为 0.2、0.33、0.5 和 0.8 四种情况。图 3 给出  $M=0.2$  相对相位情况。

我们知道不稳定腔在共轭面上的有效光斑尺寸大小直接影响光束的输出质量。在  $M$  和  $L$ 、 $l$  相同的情况下, 有效光斑尺寸越大, 则平均发散角越差。对于我们讨论的情况光束发散角应为:

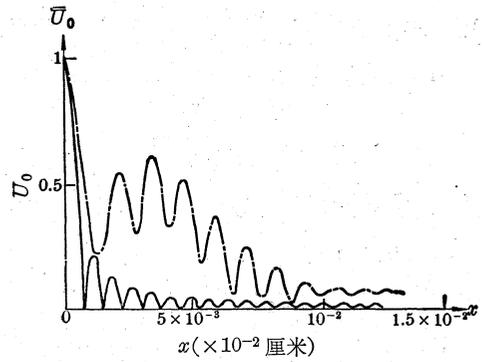
$$\Delta\theta = \frac{2\Delta x}{d_i} = \frac{2(1-M)}{ML} \Delta x \quad (19)$$

这里  $\Delta x$  应为有效光斑宽度的一半。(19) 式是对输出孔径大小一定的情况而言。

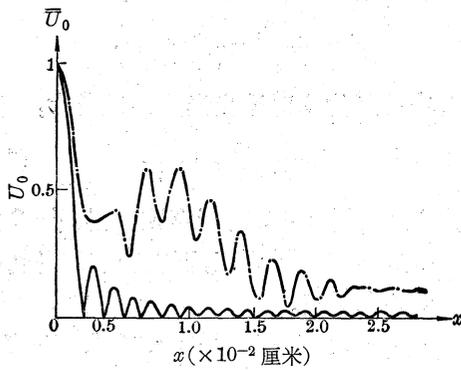
有效光斑尺寸怎样选择呢? 假定凡是相对振幅高度大于 1/3 的振幅都算在有效光斑之内, 我们把从零点到最边缘满足上述条件的振幅之间的距离为  $\Delta x$ 。因其图形对称, 我们仅给出了振幅分布从 0 到  $+x$  情况, 这已足够了。



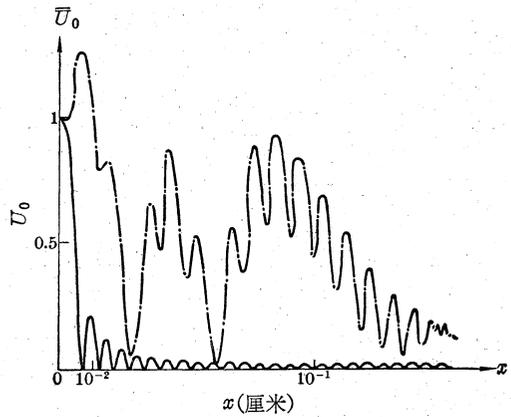
(a)  $M=0.2$   
 实线—— $A=B=C=0$   
 点划线—— $A=0, B=6 \times 10^{-8},$   
 $C=7.5 \times 10^{-9}$



(b)  $M=0.33$   
 实线—— $A=B=C=0$   
 点划线—— $A=0, B=6 \times 10^{-8},$   
 $C=7.5 \times 10^{-9}$



(c)  $M=0.5$   
 实线—— $A=B=C=0$   
 点划线—— $A=0, B=6 \times 10^{-8},$   
 $C=7.5 \times 10^{-9}$



(d)  $M=0.8$   
 实线—— $A=B=C=0$   
 点划线—— $A=0, B=6 \times 10^{-8},$   
 $C=7.5 \times 10^{-9}$

图 2

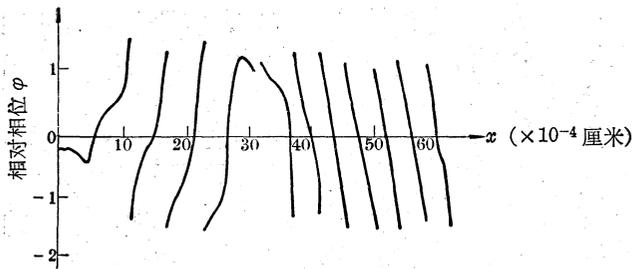


图 3 相对相位( $M=0.2$ )

从图 2 中可以看到, 对于  $B=6 \times 10^{-8}$ ,  $C=7.5 \times 10^{-9}$  情况, 相对振幅分布和  $B=C=0$  情况大不一样。随着  $M$  的增加, 有效光斑尺寸增大 (注意图 2 中的横坐标比例不一样)。根据有效光斑尺寸代入公式 (19), 我们

可以得到在  $B=6 \times 10^{-8}$ ,  $C=7.5 \times 10^{-9}$  情况下, 对不稳腔的方向性影响。

$$M=0.2, \Delta\theta=0.24 \text{ 毫弧度};$$

$$M=0.33, \Delta\theta=0.24 \text{ 毫弧度};$$

$$M=0.5, \Delta\theta=0.28 \text{ 毫弧度};$$

$$M=0.8, \Delta\theta=0.61 \text{ 毫弧度};$$

另外再根据计算的  $M=0.25$ 、 $M=0.4$ 、 $M=0.6$  的结果, 我们可以做出图 4 的曲线。

从图 4 曲线可知,  $M$  增加使发散角变大, 当  $M < 0.4$  时, 介质的不均匀性对发散角影响基本一样。如果输出发散角在此时有差

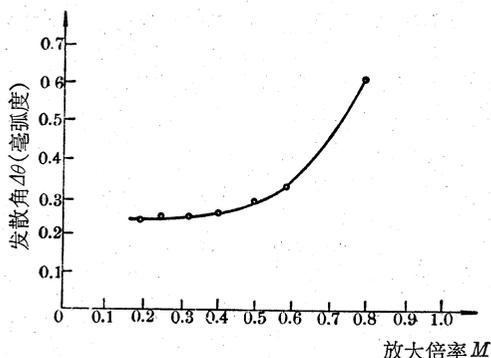


图 4

别，那主要是由于高次模参与了振荡而造成的。当  $M > 0.5$  时，介质不均匀性对方向性的影响显著增大，方向性成倍地变坏，当然，这时变坏的另一个原因即高次模参与振荡这里没有计算在内。

从相位图 3 可以看出，当  $M=0.2$  时，对于  $B=6 \times 10^{-8}$ ， $C=7.5 \times 10^{-9}$  相对相位变化较大，其中不连续段是因为相位差差  $\pi$  所致。其它倍率的相对相位有所差异，这里不再叙述它们了。

3.  $\alpha=0$ ， $A=0$ ， $B$ 、 $C$  缩小 5 倍和 10 倍两种情况，即

$$B=1.2 \times 10^{-8}, C=1.5 \times 10^{-9}$$

和

$$B=6 \times 10^{-9}, C=7.5 \times 10^{-10}$$

两种情况。对于  $M=0.5$  相对振幅计算结果示于图 5。

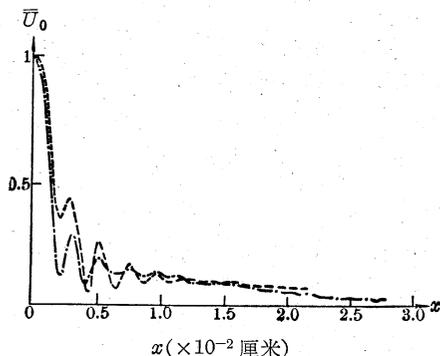


图 5 介质不均匀减少 10 倍和 5 倍 ( $M=0.5$ )

点划线—— $A=0$ ， $B=6 \times 10^{-9}$ ， $C=7.5 \times 10^{-10}$   
虚线—— $A=0$ ， $B=1.2 \times 10^{-8}$ ， $C=1.5 \times 10^{-9}$

从图中可以看出，有效光斑尺寸比图 2 (c) 的  $B=6 \times 10^{-8}$ 、 $C=7.5 \times 10^{-9}$  要大大减少，而缩小 10 倍比缩小 5 倍的有效光斑尺寸更小。根据公式 (19) 从有效光斑尺寸可以算出两种不同情况的方向性为：

$$B=1.2 \times 10^{-8}, C=1.5 \times 10^{-9} \text{ 时}$$

$$\Delta\theta=0.062 \text{ 毫弧度};$$

$$B=6 \times 10^{-9}, C=7.5 \times 10^{-9} \text{ 时}$$

$$\Delta\theta=0.02 \text{ 毫弧度};$$

在缩小 10 倍的情况下发散角似乎比空腔小，这是由于有效光斑尺寸取得不一样所致。如果按同样标准，空腔方向性仅为 0.020 毫弧度，由此可以看出，要在此情况下使方向性改变到近衍射极限，必须再提高介质的均匀性 10 倍左右才行。

(4) 增益分布不均匀情况

(a)  $\alpha=-1.44$ ， $M=0.5$  而有  $A=B=C=0$  和  $A=0$ ， $B=6 \times 10^{-8}$ ， $C=7.5 \times 10^{-9}$  两种情况，相对振幅分布如图 6 所示。

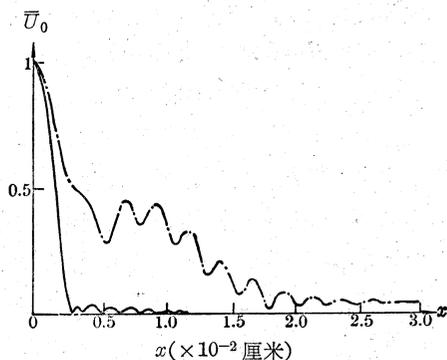


图 6 增益分布不均匀 ( $\alpha=-1.44$ ， $M=0.5$ )

实线—— $A=B=C=0$ ；点划线—— $A=0$ ， $B=6 \times 10^{-8}$ ， $C=7.5 \times 10^{-9}$

对于  $A=B=C=0$  情况，由于这种介质增益不均匀，使得有效光斑尺寸比没有增益情况扩大了（与图 2 (c) 相比），发散角变为 0.05 毫弧度。而介质不均匀时，即  $B=6 \times 10^{-8}$ ， $C=7.5 \times 10^{-9}$  时，有效光斑尺寸比没有增益情况减少了，发散角变为 0.24 毫弧度，而没有增益分布情况为 0.28 毫弧度。对于该种增益分布情况，如果介质不均匀情况不

变, 则这种增益分布有助于改善激光的方向性。另外, 从振幅分布情况看, 有增益分布和没有增益分布差不多, 只不过振幅相对幅度小些而已。

(b)  $\alpha=1.44$ ,  $M=0.5$  而有  $A=B=C=0$  和  $A=0, B=6 \times 10^{-8}, C=7.5 \times 10^{-9}$  两种情况, 相对振幅如图 7 所示。

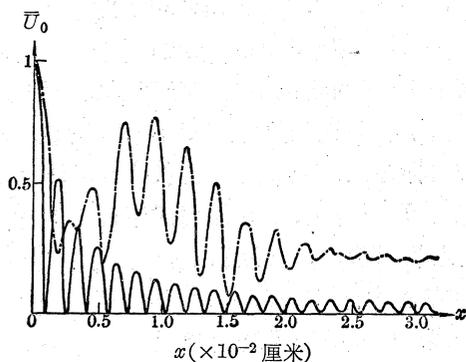


图 7 增益分布不均匀( $\alpha=1.44, M=0.5$ )  
实线—— $A=B=C=0$ ; 点划线—— $A=0,$   
 $B=6 \times 10^{-8}, C=7.5 \times 10^{-9}$

可以看出, 这种增益分布使得  $A=B=C=0$  和  $A=0, B=6 \times 10^{-8}, C=7.5 \times 10^{-9}$  两种情况有效光斑尺寸大大增加了。同样按相对振幅大于  $1/3$  的标准来确定有效光斑尺寸, 则在这种增益情况下, 空腔(介质均匀传输)发散角为  $0.074$  毫弧度, 比没有该增益分布情况大  $3$  倍多。而对  $B=6 \times 10^{-8}, C=7.5 \times 10^{-9}$  情况, 发散角  $\Delta\theta=0.33$  毫弧度, 比没有这种增益分布情况要大(前者为  $0.28$  毫弧度)。另外, 还可以看出, 这种情况的振幅背景幅度较大。

由上述两种情况看, 增益分布情况不同会影响激光束的发散角, 为此选择合理的增益分布对提高激光器光束质量也是很重要的。

### 三、结 语

用频谱分析的方法对具有非均匀介质的不稳定腔模式的理论分析和计算结果表明, 由于计算的模式振幅分布是在共轭面上的场分布, 因此, 除了免去通常计算谐振腔模式在腔镜上的场分布用的反复迭代计算外, 还可以直接从计算结果估计出激光器输出光束质量, 也可以得出介质非均匀性与激光输出发散角之间的大致数量关系。

这里仅对一维情况和一种钹玻璃介质不均匀情况进行了计算, 说明了一些问题。虽然是对望远镜腔进行的计算, 但其结果对具有同样不均匀介质的其它形式非稳定腔也是适用的。这样的计算方法同样也可以用于其它形式的非均匀介质。

### 参 考 文 献

- [1] 王维瑞, “不稳定腔的频谱分析”, 《激光》, 1979, 6, No 2, 8~11.
- [2] J. W. Goodman, “Introduction to Fourier Optics”, (中译本: 《傅里叶光学导论》)。
- [3] Ю. А. Апаньев; *Квант. электр.*, 1971, Ио. 6, 3~34.
- [4] 偃内义行, 井上浩; 《电子通信学会论文志》, 1975, 58-c, Ио 5, 297~303.