时间平均法及应用

赵国清

（哈尔滨科学技术大学）

时间平均法为全息干涉计量术中常用的方法之一。

常用的全息干涉量度技术有三种，即两次曝光法、实时观察法和时间平均法。而时间平均法具有如下的特点：即使对粗糙的表面，也能出现清晰的干涉条纹；测量是非接触式的，同时可以测量光波波长数量级的微小振幅等优点。

本文的目的：结合我校激光研究室振型像片的研究，介绍时间平均法的近似分析及原理。

下面的两张照片就是我校激光研究室拍摄的压气机叶片、膜片的振型。

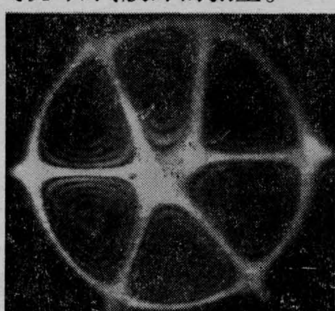


图 1

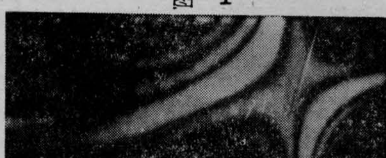


图 2

一、时间平均法的基本方程

为了考虑物体振动的问题，则物光 a 随时间 t 的先后而变化，即物光 a 是时间 t 的函数，记为：

$$a=a(x,\ t)$$

而参考光始终不变，故记为

$$r=r(x)$$

则总光场 $H(x,\ t)$ 为：

$$H(x,\ t)=r(x)+a(x,\ t) \tag{7}$$

因而在 Δt 时间内的曝光量可表示为

$$E(x)=|H(x,\ t)|^2\Delta t$$

当考虑在 T 时间内连续曝光的时候，把时间 T 记为 $\left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right]$，同时分为 n 个小区间，第 i 个区间的长度为 Δt_i，而在此时间内相应的曝光量为 $\Delta E_i(x)$，则

$$\Delta E_i(x)=|H_i(x,\ t)|^2\Delta t_i$$

因此，总的曝光量为 n 次曝光量之和，即

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n}|H_i(x,\ t)|^2\Delta t_i$$

根据定积分的定义，我们可以将记录介质在 x 点上的曝光量写成

$$E(x)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|H_i(x,\ t)|^2dt \tag{8}$$

将方程(7)代入(8)式得，

$$E(x)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}(a_0^2+r_0^2+r^*a+ra^*)dt$$

$$=E_r+E_s+r(x)\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}a^*(x,\ t)dt+r^*(x)\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}a(x,\ t)dt$$

收稿日期：1978年7月27日。

我们知道与原像有关的项为最后一项，并把这一项记为

$$E_P = r^*(x) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a(x,\ t)dt \tag{9}$$

利用矩形函数及傅里叶变换性质，方程(9)可写成

$$E_P = Tr^*(x)\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(\pi\nu T)\tilde{a}(x, \nu)d\nu \tag{10}$$

其中

$$\sin cx = \frac{\sin x}{x}$$

$$\tilde{a}(x,\ \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x,\ t)e^{-2\pi i\nu t}dt$$

方程(10)可解释为，它是一个线性滤波器，具有转移函数 $\sin c(\pi\nu T)$。

当我们考虑物体光束的位相变化对时间具有正弦型的依赖关系时，则物光的一般表示式为：

$$a(x,\ t) = a_0(x,\ t)e^{i\varphi(x,\,t)}$$

$$\varphi(x,\ t) = \varphi_0 + Ka(\cos\alpha + \cos\beta)\sin\omega t$$

其中 φ_0 为初位相，$K = \frac{2\pi}{\lambda}$，a 表示物体振动时的振幅，ω 为圆频率，物体 $S(x_0,\ z_0)$ 运动方向为 V，角 α 与 β 由图 3 所示。利用贝塞尔函数的二个展开式，然后化简整理可得

$$E_P = Tr^* a_0 e^{i\varphi_0} J_0[Ka(\cos\alpha + \cos\beta)] \tag{11}$$

其中 $J_0(x)$ 表示零阶贝塞尔函数。

如果我们用与参考光波 r 全同的光波去

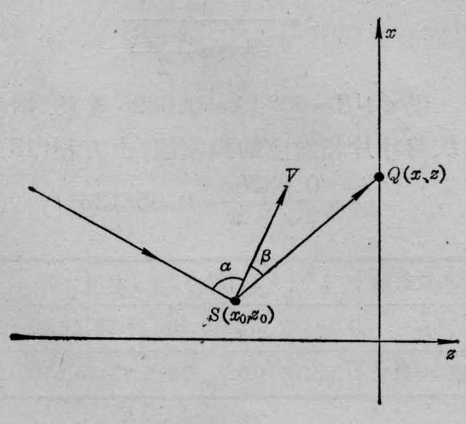


图 3

照明此全息图，则与原像项对应的像，即透射光波可表示为

$$W_P = Tr_0^2 a_0 e^{i\varphi_0} J_0[Ka(\cos\alpha + \cos\beta)] \tag{12}$$

由此得到 W_P 的光强为

$$\begin{aligned} I &= |W_P|^2 \\ &= T^2 r_0^4 a_0^2 J_0^2[Ka(\cos\alpha + \cos\beta)] \\ &= I_0 J_0^2(\rho) \end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$I_0 = T^2 r_0^4 a_0^2 \tag{14}$$

$$\rho = \frac{2\pi}{\lambda} a(\cos\alpha + \cos\beta) \tag{15}$$

公式(13)称为时间平均法用于物体振动的基本方程，它是分析研究被测物体的振态、应变、应力分布的理论根据。

二、基本方程的应用举例

下面是时间平均法用于叶片振动的例子，被测物是压气机的叶片，光路布置如图 4。为了计算的方便，尽量使被测物体与记录介质平行，物体振动方向垂直于叶片表面，因此，角 $\alpha=\beta$，在此条件下，制成全息图。图 5、图 6 为压气机叶片所拍摄的时间平均法照片。

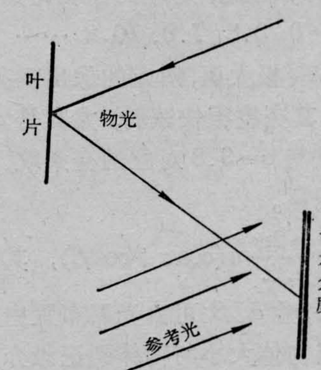


图 4

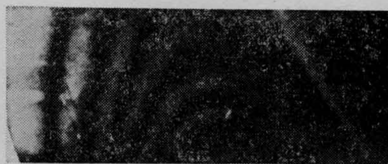
我们已知：

$$I = I_0 J_0^2(\rho)$$

由贝塞尔函数的性质知道，$J_0(\rho)$ 有无限多个极大点和极小点，见图 7。

2370 赫芝

图 5



2030 赫芝

图 6

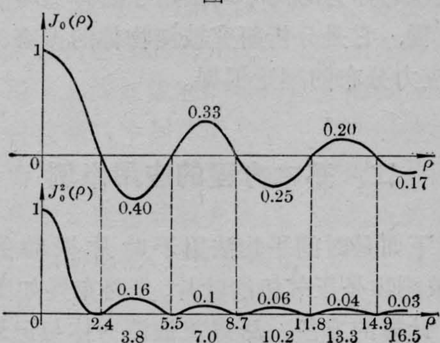


图 7

由图 7 可以见到，当

$$\rho=2.4,\ 5.5,\ 8.7,\ \cdots\cdots$$

时，$J_0^2(\rho)=0$，因此，对应的像在此处为暗条纹，而当 $\rho=0,\ 3.8,\ 7.0,\ 10.2,\ \cdots\cdots$

时，$J_0^2(\rho)$ 取得极大值，对应的像出现亮条纹，可以看出，其亮度很快减弱，尤其是 $\rho=0$ 对应的亮条纹与 $\rho=3.8$ 对应的亮条纹，其亮度相差更为明显。

由于 $\rho=\dfrac{2\pi}{\lambda}a(\cos\alpha+\cos\beta)$，其中 λ 为波长（常数），角 α、β 可由光路布置中实际测量所得，当物体大小与物体到记录介质距离相比很小时，α、β 可以看作常量，因此，可以看出 ρ 值的大小唯一的由振幅 a 决定。

当 $a=0$ 时，$\rho=0$ 像上出现最亮的明条纹，换句话说，物体上与此明条纹相对应的部分振幅为零，此最亮的线称为节线，当远离节线时，振幅 a 渐增，ρ 值也随之增大，当

$\rho=2.4$ 时，$J_0^2(\rho)=0$，像上出现一级暗条纹；

$\rho=3.8$ 时，$J_0^2(\rho)$ 取极大值，像上出现一级明条纹；

$\rho=5.5$ 时，$J_0^2(\rho)=0$，像上出现二级暗条纹；

$\rho=7.0$ 时，$J_0^2(\rho)$ 取极大值，像上出现二级明条纹……。

由此看到：时间平均法的像是以静止物体的像为背景，再加上明暗相间的干涉条纹。

凡是全息像上最亮的条纹与物体上振幅为零的部位相对应，称为节线。

节线两边的明暗条纹都是与物体上相同振幅的部位相对应的，称为等幅线。

节线把物体分成若干个区域，在同一区域内，物体振动的位相是相同的，而节线两侧振动的位相是相反的。

由于 $\rho=\dfrac{2\pi}{\lambda}a(\cos\alpha+\cos\beta)$，解出 a 得

$$a=\frac{\rho\lambda}{2\pi(\cos\alpha+\cos\beta)} \tag{16}$$

事实上，叶片振动方向很难精确判断，因此，角 α、β 无法测量，故一般把方程(16)写成下面的形式

$$a=\frac{\rho\lambda}{4\pi\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}} \tag{17}$$

而 $\alpha+\beta$ 比较容易测定，同时尽量使 $\alpha=\beta$，于是

$$a=\frac{\lambda\rho}{4\pi\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}} \tag{18}$$

设 $\alpha+\beta=60°$，$\lambda=0.6328$ 微米，则像上条纹与叶片相对应的振幅值，由方程(18)得

$$a=\frac{0.6328\rho}{2\sqrt{3}\,\pi}=0.05813\rho \tag{19}$$

明条纹级数	1	2	3	4	5	6
ρ	3.848	7.015	10.20	13.32	16.47	19.62
振幅 a（微米）	0.2241	0.4078	0.5929	0.7743	0.9572	1.140

如果改变照相条件，$\alpha+\beta=20°$，则

$$a=\frac{0.6328\rho}{4\pi\cos 10^{\circ}}=0.05111\rho \qquad (20)$$

明条纹级数	1	2	3	4	5	6
ρ	3.848	7.015	10.20	13.32	16.47	19.62
a (微 米)	0.1970	0.3585	0.5213	0.6808	0.8416	1.002

从上述二表可以看出,当 $\alpha+\beta$ 角度增大时,则等幅线将向远离节线方向移动,条纹间隔也相应加大,因此,$\alpha+\beta$ 测量值的误差直接影响振幅计算的精度。

从时间平均全息干涉的照片,能够比较精确地计算出振幅分布,根据材料力学的原理,在已知振动物体的振幅分布时,能够计算出振动物体的应力分布,因此,时间平均法干涉量度技术对振动物体的应力分析提供了新的途径。

以上例子,我们只计算到六级明条纹,为了能对更多级的条纹振幅进行计算,我们把 $J_0^2(\rho)$ 取极大及极小的 ρ 值列表于下。

$J_0^2(\rho)$各级极小值所对应的 ρ 值

n	ρ	n	ρ	n	ρ	n	ρ
1	2.404	9	27.49	17	52.62	25	77.74
2	5.520	10	30.63	18	55.76	26	80.89
3	8.653	11	33.76	19	58.90	27	84.03
4	11.79	12	36.91	20	62.04	28	87.18
5	14.93	13	40.05	21	65.18	29	90.32
6	18.07	14	43.19	22	68.33	30	93.46
7	21.21	15	46.34	23	71.47	31	96.60
8	24.35	16	49.48	24	74.61	32	99.74

$J_0^2(\rho)$各级极大值所对应的 ρ 值

n	ρ	n	ρ	n	ρ	n	ρ
1	3.848	9	29.05	17	54.19	25	79.32
2	7.015	10	32.19	18	57.33	26	82.46
3	10.20	11	35.33	19	60.47	27	85.60
4	13.32	12	38.47	20	63.61	28	88.75
5	16.47	13	41.62	21	66.75	29	91.89
6	19.62	14	44.76	22	69.90	30	95.03
7	22.76	15	47.90	23	73.04	31	98.17
8	25.90	16	51.04	24	76.18	32	

(上接第16页)

$$R_b=\frac{R_A}{n_A}+\frac{R_C}{n_C} \qquad (18)$$

其中 R_A、R_C、n_A、n_C 分别为阴、阳离子的离子折射度和配位数。几种氧化物和氟化物在玻璃中的 $\bar{n}_2$ 与 R_b 的关系见图7, 氧化物和氟化物基本上在一条曲线上。在无机玻璃中氧离子和氟离子的配位数皆为2, 氟离子的离子折射度($R_{F^-}=2.4$ 厘米^3)比氧离子折射度($R_{O^=}=6.6$ 厘米^3)小得多, 所以氟化物在玻璃中的部分非线性折射率也比氧化物小得多。电价高的轻金属离子如 Be^{2+}、Mg^{2+}、B^{3+}、Al^{3+}、Si^{4+}、P^{5+} 等的离子折射度很小, 所以这类氧化物和氟化物 $\bar{n}_2$ 值也很小, 应该选择这些化合物作为要求低 n_2 玻璃的主要成分。

参 考 文 献

[1] R. Hellwarch; Progress in Quantum Electronics, 1977, Vol. 5, Part 1.

[2] R. Hellwarch; *Phys. Rew.*, 1975, **B-11**, No. 2, 964.

[3] M. J. Weber; *Appl. Phys. Lett.*, 1978, **32**, No. 7, 403.

[4] W. L. Smith; *Phys. Rev.*, 1975, **B-12**, No. 2, 706.

[5] M. D. Levenson; *IEEE J., Quant. Electr.*, 1974, **QE-10**, No. 2, 110.

[6] A. Qwyoung; *Phys. Rev.*, 1972, **B-5**, No. 2, 629.

[7] A. Feldman; *IEEE J., Quant. Electr.*, 1973, **QE-9**, No. 11, 1054.

[8] M. J. Moran; *IEEE J., Quant. Electr.*, 1975, **QE-11**, No. 6, 259.

[9] E. S. Bliss, D. R. Speck, W. W. Simmons; *Appl. Phys. Lett.*, 1974, **25**, No. 12, 728.

[10] D. Milam, M. Weber; *Opt. Commun.*, 1976, **18**, No. 1, 172.

[11] LLL, 1974, Reports.

[12] Schatt-Mainz Innovation, 1977.

[13] 干福熹,《中国科学》, 1974, **7**, No. 4, 351.

[14] 干福熹, 汪少胜,《中国科学院光学精密机械研究所集刊》, 第六集, 1964年, 39页。

[15] С. С. Багданов; Структурная рефрактометрия, 1959, стр. 32.