

直角棱镜象散谐振腔的分析

方 洪 烈

(中国科学院上海光机所)

一、引 言

固体激光器的激活介质由于激光束的自聚焦容易破坏,从而妨碍了输出功率和能量的提高。理论分析^[1,2]指出采用椭圆光束工作时,有可能提高激活介质的破坏阈值。实验表明^[3],激活介质的破坏阈值能提高达100倍。此外,我们的实验证实^[4]象散不稳定腔在大器件上也可以提高破坏阈值,从而获得更高的输出能量和功率。

激光器输出光束的质量与谐振腔密切相关,理论^[5]和实验^[6]都表明直角棱镜不稳定腔激光器具有良好的特性。看来对直角棱镜象散谐振腔作一个分析是有益的。

二、问题的公式化

我们的分析利用[7]所完成的方法。[7]中指出对于轴对称谐振腔的特征态是由腔内可存在的特征光线汇来描写,此光线汇满足一个矩阵方程

$$D \begin{pmatrix} X \\ \theta \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ \theta \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中 D 是谐振腔往返一周的变换矩阵;列矩阵 $\begin{pmatrix} X \\ \theta \end{pmatrix}$ 是光线汇中每条光线的空间坐标; M 是特征值,对于点光束腔是光束口径在腔内往返一周的放大倍数;对于高斯腔是与光束参量有关的量。

对于非轴对称的系统,光线在 X 方向与 Y 方向经受的变换不同,因此不再能利用二阶矩阵来描述,而必须使用四阶矩阵。

首先考虑任意一个四阶矩阵

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{pmatrix} \quad (2)$$

它的特征方程是

$$\text{Det}(D - MI) = 0 \quad (3)$$

其中 I 是单位矩阵,而 Det 符号表示行列式。因为 D 是四阶矩阵,(3)便是 M 的四次方程,详细写出如下:

$$M^4 - \text{Sp}(D)M^3 + \text{Det}(2)M^2 - \text{Det}(3)M + \text{Det}(D) = 0 \quad (4)$$

其中 Sp 表示矩阵的迹,而

$$\begin{aligned} \text{Det}(2) &= \text{Det}(12) + \text{Det}(13) \\ &+ \text{Det}(14) + \text{Det}(23) \\ &+ \text{Det}(24) + \text{Det}(34) \end{aligned} \quad (5)$$

和

$$\begin{aligned} \text{Det}(3) &= \text{Det}(123) + \text{Det}(124) \\ &+ \text{Det}(134) + \text{Det}(234) \end{aligned} \quad (6)$$

其中符号 $\text{Det}(13)$ 表示由矩阵 D 的对角元素 D_{11} 和 D_{33} 为对角元素以及相应编号次序的元素构成的二阶矩阵,具体写出是

$$\text{Det}(13) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{13} \\ D_{31} & D_{33} \end{pmatrix}$$

余此类推,同样有

收稿日期:1978年2月21日。

$$\text{Det}(124) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{24} \\ D_{41} & D_{42} & D_{44} \end{pmatrix}$$

等等。

对于理想光学系统

$$\text{Det}(D) = 1 \quad (7)$$

方程(4)是一个倒数方程(详见附录),又因为方程(4)中的常数项等于1,我们可以知道方程(4)的根必定是成对出现的,而且每一对根的乘积等于1。这样的两个根对应着在谐振腔内两个方向上传播的光线汇的(互逆传播的)特征值。而两组根的每一组分别描写光线在 X 方向和 Y 方向的传播情况。当两组根是重根时,意味着光线汇在 X 方向和 Y 方向的传播情况是相同的,这就是轴对称的系统。

对于二阶矩阵,如果根是实的,说明光线汇是一个点光束,谐振腔属于点光束腔(包括不稳定腔、共心腔和平行平面腔),否则是一个高斯光束,谐振腔属于高斯腔(即稳定腔)。对于四阶矩阵来说,两组实重根表示腔的特征态是一个空间点光束;两组不重复根表示一个象散点光束,两组重复根表示一个空间高斯光束;两组不重复根表示象散高斯光束。一组实根一组复根时表示它在一个方向上是点光束而在另一个(垂直于前一个)方向上是高斯光束。关于点光束的发光点或高斯光束的腰斑的空间位置的确定见[7]。

上面的讨论还有一个前提必须指出,这就是两组根分别只与两个坐标方向(X, Y)的参量有关,而与另一个坐标方向的参量无关。如果两组根都分别包含有两个坐标方向的参量时可分为两种情况:①如果将坐标 XY 旋转一个角度以后能使两组根都只与一个坐标方向有关时,上述讨论仍然有效。②否则可能发生一个坐标 X (或 Y) 相对于另一个 Y (或 X) 的旋转,此时 X 和 Y 不再是直角坐标系了。

三、棱镜象散腔

现在我们来讨论一个这样的谐振腔,见图1。它由两块全反射直角棱镜和一块象散透镜构成。象散透镜在两个主方向的光焦度分别是 φ (某方向) 和 ψ (另一方向)。光焦度为 φ 的主方向与两棱镜棱线的夹角分别为 Θ_1 和 Θ_2 。为简单计假定透镜是薄的。透镜到两棱镜如图1所示的参考平面的距离分别为 a 和 b 。两棱镜与 Z 轴垂直。选三个坐标系如下: $O-XYZ$ 的 Y 轴平行于镜1的棱线, $O-X''Y''Z$ 的 Y'' 平行于镜2的棱线, $O-X'Y'Z$ 的 Y' 轴平行于透镜的光焦度为 ψ 的主方向。因此 $Y-Y'$ 方向的夹角为 Θ_1 , $Y'-Y''$ 之间的夹角为 Θ_2 。它们之间的变换关系如下

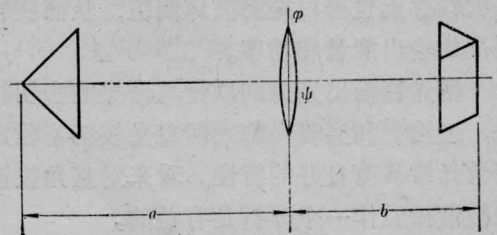


图 1

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_1 & s_1 \\ -s_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_2 & s_2 \\ -s_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \end{pmatrix}; \end{aligned} \right\} \quad (8)'$$

其中

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \cos \Theta_1, \quad s_1 = \sin \Theta_1; \\ c_2 &= \cos \Theta_2, \quad s_2 = \sin \Theta_2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

如果考察的是空间光线，它的空间位置可用 X 、 Y 、 θ 、 ϕ 四个量来描写^[7]，它可以写成列矩阵的形式如下：

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \quad (10)$$

那么，棱镜 1 在 O - XYZ 坐标系中，棱镜 2 在 O - $X''Y''Z$ 坐标系中的反射矩阵是

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

透镜在 O - $X'Y'Z$ 坐标系的矩阵是[见(12)]：

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & s_1 \\ 0 & 0 & -s_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \varphi & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \psi & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} c_2 & s_2 & 0 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & s_2 \\ 0 & 0 & -s_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ +s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & -s_2 \\ 0 & 0 & s_2 & c_2 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\varphi & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\psi & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & -s_1 \\ 0 & 0 & s_1 & c_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & -D_{14} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{11} & -D_{21} \\ -D_{32} & D_{42} & -D_{12} & D_{22} \end{pmatrix} \quad (14) \end{aligned}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} c'_1 &= \cos 2\theta_1, & s'_1 &= \sin 2\theta_1; \\ c'_2 &= \cos 2\theta_2, & s'_2 &= \sin 2\theta_2; \\ g &= 1 - a\varphi, & h &= 1 - b\psi; \\ \alpha &= 1 - a\psi, & \beta &= 1 - b\psi; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \pm\varphi & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \pm\psi & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

光线传播距离 L 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \pm L & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \pm L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

其符号规则如下：光线沿 Z 方向传播时距离取正号，反向传播时取负号；光线与 Z 轴的夹角 θ 与 ϕ 一律取锐角，由光线转向 Z 轴为顺时针时为正，否则为负；汇聚透镜是正，发散透镜取负。

对于参考平面 1，光线在腔内往返一周的变换矩是[见(14)]

$$\begin{aligned}
D_{11} &= c_1^2 c_2' (2gh - 1) - s_1^2 c_2' (2\alpha\beta - 1) \\
&\quad - s_1' s_2' (g\beta + ah - 1), \\
D_{12} &= -s_1' c_2' (gh + \alpha\beta - 1) \\
&\quad - c_1^2 s_2' (g\beta + ah - 1 + \beta - h) \\
&\quad + s_1^2 s_2' (g\beta + ah - 1 - \beta + h), \\
D_{13} &= 2c_1^2 c_2' g (ah + b) - 2s_1^2 c_2' \alpha (a\beta + b) \\
&\quad - s_1' s_2' [\alpha (ah + b) + g (a\beta + b)], \\
D_{14} &= -s_1' c_2' [g (ah + b) + \alpha (a\beta + b)] \\
&\quad - c_1^2 s_2' [\alpha (ah + b) + g (a\beta + b)], \\
D_{21} &= s_1' c_2' (gh + \alpha\beta - 1) \\
&\quad - s_1^2 s_2' (g\beta + ah - 1 + \beta - h) \\
&\quad + c_1^2 s_2' (g\beta + ah - 1 - \beta + h), \\
D_{22} &= -s_1^2 c_2' (2gh - 1) + c_1^2 c_2' (2\alpha\beta - 1) \\
&\quad - s_1' s_2' (g\beta + ah - 1), \\
D_{24} &= -s_1^2 c_2' g (ah + b) \\
&\quad + 2c_1^2 c_2' \alpha (a\beta + b) \\
&\quad - s_1' s_2' [\alpha (ah + b) + g (a\beta + b)], \\
D_{31} &= -2c_1^2 c_2' h\varphi + 2s_1^2 c_2' \beta\varphi \\
&\quad + s_1' s_2' (h\psi + \beta\varphi), \\
D_{32} &= s_1' c_2' (h\varphi + \beta\psi) + c_1^2 s_2' (h\psi + \beta\varphi), \\
D_{42} &= 2s_1^2 c_2' h\varphi - 2c_1^2 c_2' \beta\psi \\
&\quad + s_1' s_2' (h\psi + \beta\varphi).
\end{aligned} \tag{16}$$

对于矩阵(14)不难求得:

$$\begin{aligned}
\text{Sp}(D) &= 4 \cos 2\theta_1 \cos 2\theta_2 (gh + \alpha\beta - 1) \\
&\quad - 4 \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 (g\beta + ah - 1) \\
&= 2A,
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\text{Det}(2) &= A^2 + 2c_2^2 [1 - 2(gh - \alpha\beta)^2] \\
&\quad + 2s_2^2 [(g\beta + ah - 1)^2 - (\beta - h)^2] \\
&\quad - 4c_1^2 s_1^2 c_2^2 s_2^2 [(gh + \alpha\beta)(2 - g\beta - ah) \\
&\quad + (g\beta + ah)(2 - gh - \alpha\beta)] \\
&\quad - 2c_1^2 s_2^2 [gh(1 - \alpha\beta) + \alpha\beta(1 - gh) \\
&\quad + g\beta(1 - g\beta) + ah(1 - ah) \\
&\quad + (g\beta - ah)(\beta - h)] \\
&\quad + 2s_1^2 s_2^2 [(gh + \alpha\beta)^2 \\
&\quad - (g\beta + ah)(g\beta - ah) \\
&\quad + 3(g\beta - ah)(\beta - h)] \\
&\quad - 2s_1^2 c_2^2 [gh(1 - gh) + \alpha\beta(1 - \alpha\beta)] \\
&= A^2 + B.
\end{aligned} \tag{18}$$

特征方程(4)变为:

$$\begin{aligned}
M^4 - 2AM^3 + (A^2 + B) \\
- 2AM + 1 = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

为了求解(19),我们用 M^2 去除方程(19)得:

$$M^2 - 2AM + A^2 + B - 2A \frac{1}{M} + \frac{1}{M^2} = 0, \tag{20}$$

引入量:

$$Q = M + \frac{1}{M}. \tag{21}$$

将(21)代入方程(20)得:

$$Q^2 - 2AQ + A^2 + B - 2 = 0. \tag{22}$$

由(22)求得

$$Q = A \pm \sqrt{2 - B}, \tag{23}$$

(23)代入(21)求得:

$$M = \frac{1}{2} Q \pm \frac{1}{2} \sqrt{Q^2 - 4}. \tag{24}$$

由腔的理论^[7]可知,点光束在两个方向上传播时放大倍数是互为倒数的。不难看出,由(24)式决定的两个根 M 的值是互为倒数的,因此这两个 M 值是在同一坐标方向上两个相对传播光束的放大倍数。光束在相对方向上的放大倍数互为倒数,这是光路可逆定理的必然结果。由(21)式我们知道 Q 是这两个放大倍数的和。因此,由方程(22)所决定的两个不同的 Q 反映了腔在两个不同的坐标方向上(X 和 Y)的特性。如果 Q 具有重根,则腔具有轴对称性质,否则腔是非轴对称的。

四、棱镜象散腔的稳定性

文献[7]已经指出,稳定腔的特征态是斯光束,不稳定腔的特征态是点光束。

假使谐振腔是一个点光束腔, M 必须是实数。这就要求 Q 是实数,同时要求

$$Q^2 - 4 \geq 0; \tag{25}$$

而且 Q 是实数又要求

$$2 - B \geq 0. \tag{26}$$

如果(26)式不满足,腔就不可能是点光束腔。但这只是必要条件而不是充分条件。下面讨

论几个特殊情况。

(1) 两棱镜棱线彼此平行和球面透镜的情况。这意味着如下的条件是满足的:

$$\left. \begin{aligned} c_1=c_2=1, \\ s_1=s_2=0, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\psi=\varphi, \quad (27)'$$

此时特征方程(20)变为:

$$\begin{aligned} M^2 + \frac{1}{M^2} - 4(2gh-1)\left(M + \frac{1}{M}\right) \\ + 4(2gh-1)^2 + 2 = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

此时 Q 具有重根

$$2(2gh-1) \quad (29)$$

这说明腔是轴对称的, 与假定相一致。 M 等于

$$M = 2gh - 1 \pm \sqrt{(2gh-1)^2 - 1} \quad (30)$$

这正是通常讨论的情况。

(2) 棱线平行与象散透镜的组合。此时条件(27)' 不成立, 而(27)成立。对于这种情况有

$$A = 2(gh + \alpha\beta + 1), \quad (31)$$

$$B = 2[1 - 2(gh - \alpha\beta)^2]. \quad (32)$$

Q 有如下的根

$$Q = \begin{cases} Q_1 = 4gh - 1, \\ Q_2 = 4\alpha\beta - 1. \end{cases} \quad (33)$$

由(33)式我们看 Q 具有不重根, 这是腔在 X 方向与 Y 方向不同的反映。而

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= 2gh - 1 \pm \sqrt{(2gh-1)^2 - 1} \\ M_2 &= 2\alpha\beta - 1 \pm \sqrt{(2\alpha\beta-1)^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

(34)式表明腔在 X 、 Y 方向上是不同的。它有如下三种可能的情况:

① 当条件

$$\left. \begin{aligned} (2gh-1)^2 - 1 \geq 0, \\ (2\alpha\beta-1)^2 - 1 \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

满足时, 是一个象散点光束。

② 当条件(35)不满足时是象散高斯光束。

③ 当条件(35)中只有一个满足而另一个不满足时, 是点光束和高斯光束的混合光束。

(3) 我们讨论一个十分特殊的情况, 即一个柱透镜, 它的母线平行于一个棱线, 两棱线的夹角为 $\pi/4$ 的情况。此时

$$\left. \begin{aligned} c'_2=0, s'_2=1; \\ c'_1=1, s'_1=0; \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

以及

$$\psi=0. \quad (37)$$

此时点光束谐振腔的条件是

$$2 - 2gh - (1-g)^2 \geq 0. \quad (38)$$

这样的条件用 g - h 平面上的 III、IV 区域来表征(详见图 2)

又因为 $A=0$, 由 $Q^2-4 \geq 0$ 的要求可得

$$2-g \geq 2h, g > 0, h < 0 \quad (39)$$

$$2-g \leq 2h, g < 0, h > 0 \quad (40)$$

这就是图 2 中的 V、VI 区域。

由图 2 可以看出, 此时的一个坐标轴不仅发生了平移而且发生了转动。

稳定图上坐标轴的旋转可能意味着象散光束也发生了扭曲, 即可能发生了弧矢面相对于子午面的转动。

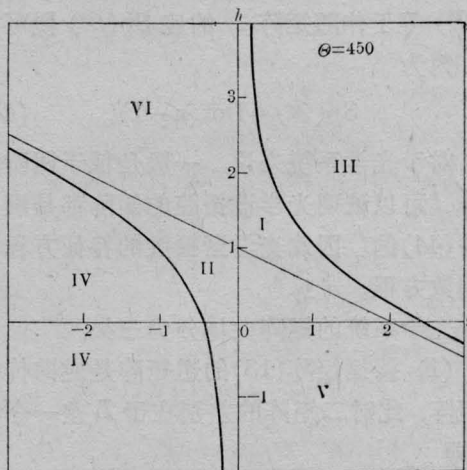


图 2

对于透镜的母线和两棱线的夹角都任意时, 腔的特性可能更为复杂得多。

附 录

一个 n 阶满秩矩阵 D 的特征方程

$$\text{Det}(D - MI) = 0 \quad (41)$$

是一个 M 的 n 次方程, 它一般具有形式

$$M^n - \text{Sp}(D)M^{n-1} + \text{Det}(2)M^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}\text{Det}(n-1) + (-1)^n\text{Det}(D) = 0, \quad (42)$$

其中 $\text{Sp}(D)$ 是矩阵 D 的迹, $\text{Det}(2)$ 是矩阵 D 的对角元素处的二阶子矩阵行列式的和, 以此类推 $\text{Det}(n-1)$ 是 $n-1$ 个子矩阵行列式的和, 而 $\text{Det}(D)$ 是矩阵 D 的行列式。

由矩阵的理论可知, 方程 (42) 的倒数 $(\frac{1}{M})$ 方程

$$\text{Det}(D)N^n - \text{Det}(n-1)N^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}\text{Sp}(D)N + (-1)^n\varphi = 0, \quad (43)$$

是 D 的逆矩阵 D^{-1} 的特征方程。因此方程 (42) 本身是倒数方程的条件, D 必须是自伴的或反自伴的。

对于低阶的矩阵自伴的条件是可以降低的, 对于二阶矩阵只要行列式等于 1 便是倒数方程。而对三阶、四阶矩阵只要矩阵的迹 $\text{Sp}(D)$ 等于伴随矩阵 \mathcal{D} 的迹 $\text{Sp}(\mathcal{D})$ 便可以了。因为

$$\text{Sp}(\mathcal{D}) = \text{Det}(n-1). \quad (44)$$

对于光学系统来说, 一般是低于四阶的矩阵, 可以证明光学谐振腔的矩阵都是满足条件 (44) 的。因此光学谐振腔的特征方程都是倒数方程。

光学系统的矩阵大体分为三类:

(1) 传播矩阵 (13) 的逆矩阵是逆向传播的矩阵, 此时二矩阵的差别在于 L 差一个符号, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & L & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -L & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad (45)$$

I 是单位矩阵。

(2) 聚焦矩阵 (12) 的逆矩阵是散焦矩阵, 此时的二矩阵亦是 φ 差一个符号, 即:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \varphi & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \psi & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\varphi & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\psi & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad (46)$$

(3) 反射矩阵 (11) 的逆矩阵仍然是它自己, 因此反射矩阵 (11) 是自伴的。对于球面反射镜来说, 反射聚焦矩阵的逆矩阵是有同样光焦度的反射散焦矩阵, 但此时二矩阵具有相同的形式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \varphi & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \psi & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

因此可得出一般结论: 反射矩阵是自伴的。

任意谐振腔的变换矩阵都是自伴矩阵的乘积。因为自伴矩阵的相似矩阵还是自伴的。虽然两自伴矩阵的乘积一般不再是自伴的, 但是此时 (44) 是成立的。这一点可证明如下。

设 $\|a_{ij}\|$ 和 $\|b_{ij}\|$ 是两自伴矩阵, 用 $\|A_{ij}\|$ 和 $\|B_{ij}\|$ 表示它们的伴随矩阵, 因此有:

$$a_{ij} = A_{ij}, \quad b_{ij} = B_{ij}. \quad (48)$$

矩阵 $\|a_{ij}\|$ 乘矩阵 $\|b_{ij}\|$ 的乘积的迹是:

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\|a_{ij}\| \cdot \|b_{ij}\|) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ji} \\ &= \text{Sp}(\|A_{ij}\| \cdot \|B_{ij}\|). \quad (49) \end{aligned}$$

光学谐振腔的变换矩阵的特征方程是倒数方程这一点是光路可逆的必然结果。

参 考 文 献

- [1] В. В. Воробьев; *Изв. Вуз, Радиофизика*, 1970, **13**, 1905.
- [2] А. Б. Шварцбург; *Изв. Вуз, Радиофизика*, 1970, **13**, 1775.
- [3] C. R. Giuliano et al.; *Appl. Phys. Lett.*, 1972, **21**, 58.
- [4] 方洪烈等; 中国科学院上海光机所研究报告第六集, 《钕玻璃高能激光器》, 65~68(1978)。
- [5] 王之江, 方洪烈; 《物理学报》, 1975, **24**, 454.
- [6] 中国科学院上海光机所 101 组, 《激光》, 1976, **3** No. 3, 29.
- [7] 王之江, 方洪烈, (待发表)。