# 自聚焦型光波导纤维的结构及其信息传输速率的理论分析

石 守 勇

(厦门大学物理系)

**提 要**

从玻璃体中离子扩散方程出发，得出了熔盐法和双坩埚法制成的自聚焦型光波导纤维中严格的折射率分布公式；并计算了用这种离子扩散规律制成的自聚焦型光波导纤维的信息传输速率；说明用这种方法制成的光波导纤维，可以传输极高速率(1千兆比特/秒/公里以上)的光信息。

光波导纤维有两种基本的结构类型，一种是套层型，一种是自聚焦型，套层型光波导纤维又有单模和多模两种。单模套层型光波导纤维的主要优点是具有较高的信息传输速率，在这种波导中，其信息传输速率仅受材料的色散特性的限制，主要缺点是波导的几何孔径太小，在目前的技术水平上，使用比较困难。多模套层型光波导纤维的几何孔径较大，但是信息传输速率受到高阶模式传输速率离散的限制。自聚焦型光波导纤维具有较高的信息传输速率，几何孔径也比较大，而且可以在一定的长度内直接传送图象，也可以制成微透镜，是一种优良的波导结构形式，所以掺杂石英制成的光波导，后来也用梯度逼近的方法，制成自聚焦型的结构形式。

光波导纤维中的径向折射率分布可以有许多形式，例如抛物线型、双曲线型等等，都具有自聚焦的传输特性，S. Kawakami 和 J. Nishizawa 认为[1]具有

$$n(x)=n_0/\cosh(ax)$$

其中 $n_0$ 表示中心线上的折射率，这样的两维折射率分布形式是最佳的；而在具有旋转对称三维波导中，最佳的折射率分布的柱坐标表示式为

$$n^2(r)=n_0^2/[1+(r/L)^2]$$

这种具有最佳折射率分布的波导，是不产生光程差的。

实际的光波导纤维，只能利用某种物理效应来实现，或者用人为控制的方法去模拟逼近。下面就对利用玻璃体中离子扩散规律研制自聚焦型光波导纤维进行理论分析。

在玻璃纤维中，令某种扩散粒子的浓度梯度为 grad $C$，那么，由于扩散而产生的扩散流密度为

$$j=-D\cdot\mathrm{grad}\,C。\tag{1}$$

式中 $D$ 是扩散系数，单位是厘米$^2$·秒$^{-1}$，$D$ 一般是个二级张量，考虑到是在玻璃体中，$D$ 是一个标量；式中负号表示粒子逆浓度梯度方向扩散。

在某一体元中，粒子浓度的变化显然等于其散度的负数，即得扩散的连续方程：

$$\frac{\partial C}{\partial t}=-\mathrm{div}j=\mathrm{div}(D\cdot\mathrm{grad}\,C)$$

收稿日期：1978年7月24日。

当扩散系数 $D$ 和浓度 $C$ 无关时，即得到一个抛物线型方程：

$$\frac{\partial C}{\partial t}=D\nabla^2 C \tag{2}$$

在给定的初始条件和边界条件下，求解扩散方程(2)，即可了解波导中扩散粒子的分布状况。

## 一、恒定边值下的扩散
## ——熔盐法离子交换

假定有一根无限长的圆柱形含 $Tl^+$ 的均匀玻璃丝，其半径为 $a$；放置在温度为 T(K) 的硝酸钾熔盐中，时间为 $t_1$。然后来分析玻璃中 $Tl^+$ 的分布状况。

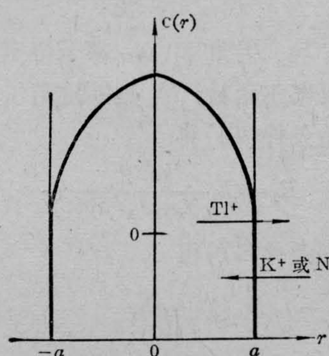


图1 扩散粒子的径向分布

对此，初始条件为

$$C(r,\ 0)=C_0 \quad (0\leqslant r\leqslant a) \tag{3}$$

$C_0$ 为常数，表示扩散粒子的初始分布浓度。

边界条件为

$$C(a,\ t)=0 \quad (t>0) \tag{4}$$

考虑到玻璃棒的轴向和角向都是均匀的，则利用分离变量法解方程(2)得

$$C(r,\ t)=f_0 J_0(\lambda r)e^{-\lambda^2 Dt} \tag{5}$$

式中 $f_0$ 和 $\lambda$ 都是待定系数。

根据初始条件(3)，把初始分布函数展开成贝塞尔函数的傅里叶系数级数时，按照贝塞尔函数的带权重 $r$ 正交性得：

$$f_0=C_0\frac{2}{\lambda a J_1(\lambda a)} \tag{6}$$

根据边界条件(4)，可得到

$$\lambda a=\mu_1 \quad (\mu_1=2.4048)$$

$\mu_1$ 为零阶贝塞尔函数 $J_0$ 的第一个根。

于是得到方程(2)在条件(3)和(4)下的解为

$$C(r,\ t)=C_0\frac{2}{\mu_1}\frac{J_0\left(\mu_1\frac{r}{a}\right)}{J_1(\mu_1)}e^{-\mu_1^2\frac{Dt}{a^2}} \tag{7}$$

$Tl^+$ 是用于控制折射率分布的组分，它在玻璃中含量变化与玻璃折射率变化的关系可以近似地表示为

$$n(r,\ t)-n_a\propto C(r,\ t)。 \tag{8}$$

$$n_0-n_a\propto C_0, \tag{9}$$

式中 $n_0=n(r)|_{r=0}$，$n_a=n(r)|_{r=a}$。所以，所得到的玻璃棒中的径向折射率分布为

$$n(r,\ t)=n_a+(n_0-n_a)\frac{J_0\left(\mu_1\frac{r}{a}\right)}{J_1(\mu_1)}e^{-\mu_1^2\frac{Dt}{a^2}}。 \tag{10}$$

扩散时间长短不同，扩散所达到的深度也不同，径向折射率分布的情况也不同：

1. 当 $t=t_1$ 时，扩散作用正好达到中心，则有如下的关系：

$$\begin{cases} Dt_1/a^2=0.08146, \\ A=\left(1-\dfrac{n_a}{n_0}\right)\left(\dfrac{\mu_1}{a}\right)^2, \\ n(r,\ t_1)=n_0\Big[1-\dfrac{1}{2}Ar^2 \\ \quad +\dfrac{1}{8}A\left(\dfrac{\mu_1}{2a}\right)^2 r^4-\dfrac{1}{72}A\left(\dfrac{\mu_1}{2a}\right)^4 r^6 \\ \quad +\cdots。 \end{cases} \tag{11}$$

2. 当 $t<t_1$ 时，扩散作用只达到 $r_1$ 处，则有

$$\begin{cases} n(r,\ t)=n_0, \quad (0\leqslant r\leqslant r_1), \\ \begin{cases} Dt/(a-r_1)^2=0.08146, \\ A=\left(1-\dfrac{n_a}{n_0}\right)\left(\dfrac{\mu_1}{a-r_1}\right)^2, \quad (r_1\leqslant r\leqslant a) \\ n(r,\ t)=n_0\Big\{1-\dfrac{1}{2}A(r-r_1)^2 \\ \quad +\dfrac{1}{8}A\left[\dfrac{\mu_1}{2(a-r_1)}\right]^2(r-r_1)^4-\cdots\Big\}。 \end{cases} \end{cases} \tag{12}$$

3. 当 $t>t_1$ 时，扩散作用已达到中心一段时间，则有

$$\begin{cases} Dt/a^2>0.08146, \\ K=\dfrac{n_a}{n_0}+\left(1-\dfrac{n_a}{n_0}\right)\dfrac{e^{-\mu_1^2\frac{Dt}{a^2}}}{\mu_1 J_1(\mu_1)}<1, \\ A=\left(1-\dfrac{n_a}{n_0}\right)\dfrac{4e^{-\mu_1^2\frac{Dt}{a^2}}}{\mu_1 J_1(\mu_1)}\left(\dfrac{\mu_1}{2a}\right)^2, \\ n(r,\ t) \\ =n_0\left\{K-\dfrac{1}{2}Ar^2+\dfrac{1}{8}A\left(\dfrac{\mu_1}{2a}\right)^2 r^4-\cdots\right\}。 \end{cases} \tag{13}$$

图2表示一根直径0.51毫米的含 $Tl^+$ 玻璃棒，按照第一种情况进行了离子交换，然后测量其径向各点的折射率，并和相应的理论曲线相比较，说明理论曲线和实验数据是相当一致的。

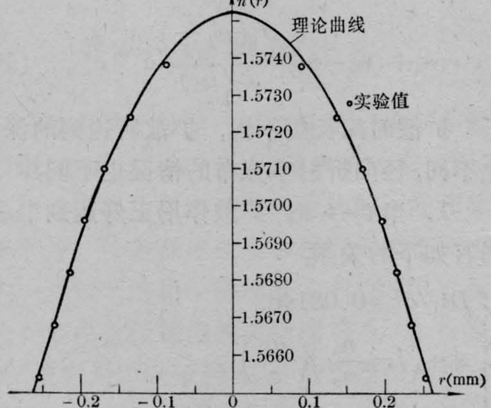


图2　熔盐法离子交换玻璃棒中径向折射率分布的理论曲线与实验值的比较

## 二、高温下玻璃体之间的扩散——双坩埚法离子交换

考虑到玻璃中部分组分(如 $Tl^+$)浓度的分布与角向、轴向无关，同时假定离子扩散正好达到中心($r=0$)和外边界($r=a$)处($t=t_1$)，那么，如图3所示，分布函数 $u_I(r,\ t)$ 和 $u_{II}(r,\ t)$ 有如下的初始条件和边界条件：

$$\begin{cases} u_I(r,\ t)\big|_{t=0}=C_0, & (0<r<a_1), \\ u_{II}(r,\ t)\big|_{t=0}=0, & (a_1<r<a), \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} u_I(r,\ t)\big|_{r=0}=C_0, \\ \dfrac{du_I(r,\ t)}{dr}\Big|_{r=0}=0, \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} u_I(r,\ t)\big|_{r=a_1}=u_{II}(r,\ t)\big|_{r=a_1} \\ \dfrac{du_I(r,\ t)}{dr}\Big|_{r=a_1}=\dfrac{du_{II}(r,\ t)}{dr}\Big|_{r=a_1} \end{cases}\quad (t>0)。 \tag{16}$$

$$\begin{cases} u_{II}(r,\ t)\big|_{r=a}=0, \\ \dfrac{du_{II}(r,\ t)}{dr}\Big|_{r=a}=0。 \end{cases} \tag{17}$$

方程(2)在这种条件下的径向分布函数解为

$$u_I(r,\ t_1)=B_1 J_0(\lambda_I r)e^{-\lambda_I^2 D_I t_1} \quad (0\leqslant r\leqslant a_1) \tag{18}$$

$$u_{II}(r,\ t_1)=[B_2+B_3 N_0(\lambda_{II} r)]e^{-\lambda_{II}^2 D_{II} t_1} \quad (a_1\leqslant r\leqslant a) \tag{19}$$

式中 $B_1$、$B_2$、$B_3$ 和 $\lambda_I$、$\lambda_{II}$ 都是待定系数，$J_0$ 是零阶贝塞尔函数，$N_0$ 是零阶诺尔曼函数。根据初始条件(14)得

$$B_1=C_0\frac{2}{\lambda_I a_1 J_1(\lambda_I a_1)} \tag{20}$$

根据边界条件(17)得

$$\begin{cases} \dfrac{B_3}{B_2}=-1/N_0(\lambda_{II},\ a), \\ N_1(\lambda_{II} a)=0, \\ \text{即} \\ \lambda_{II}=\dfrac{2.914}{a}, \quad N_0(\lambda_{II},\ a)=0.5208。 \end{cases} \tag{21}$$

所以 $u_{II}$ 的解为

$$u_{II}(r,\ t)=B_2\left[1-\frac{N_0(\lambda_{II} r)}{N_0(\lambda_{II} a)}e^{-\lambda_{II}^2 D_{II} t}\right]。 \tag{22}$$

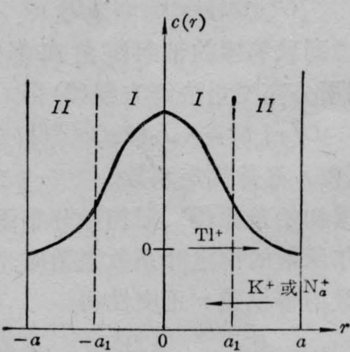


图3　双坩埚法扩散粒子的分布

再依据边界条件(16)可导出

$$\begin{cases} B_2 e^{-\lambda_{II}^2 D_{II} t_1} \\ \quad = \dfrac{B_1 J_0(\lambda_I a_1) N_0(\lambda_{II} a)}{N_0(\lambda_{II} a) - N_0(\lambda_{II} a_1)} e^{-\lambda_I^2 D_I t_1}, \\ \dfrac{J_1(\lambda_I a_1)}{J_0(\lambda_I a_1)} = -\dfrac{N_1(\lambda_{II} a_1)}{N_0(\lambda_{II} a) - N_0(\lambda_{II} a_1)}。 \end{cases} \tag{23}$$

为了从方程(23)得到一个简明的解，作如下的简化，即 $D_I = D_{II}$（在一般情况下，$D_I \neq D_{II}$，则必须具体地测量出 $D_I$ 和 $D_{II}$ 的数值，然后再求解(23)式），因而在相同的扩散时间中有 $a_1 = a/2$。这样，(23)式就简化为

$$J_1(\lambda_I a_1)/J_0(\lambda_I a_1) = 1.9423。 \tag{24}$$

由此解得待定函数 $\lambda_I$ 为

$$\begin{cases} \lambda_I = 3.740/a, \\ b_1 e^{-\lambda_{II}^2 D_{II} t} = 0.4329 C_0, \end{cases} \tag{25}$$

$b_1$ 为待定常数，它与边界条件和扩散系数 $D_I$、$D_{II}$ 有关。

于是得到方程(2)在(14)～(17)式和 $D_I = D_{II}$ 条件下的解为

$$\begin{cases} u_I(r,\ t_1) = C_0 J_0\left(3.740\dfrac{r}{a}\right), \\ \qquad \left(0 \leqslant r \leqslant \dfrac{a}{2}\right) \\ u_{II}(r,\ t_1) = 0.4329 C_0 \\ \qquad \times\left[1 - 1.920 N_0\left(2.194\dfrac{r}{a}\right)\right], \\ \qquad \left(\dfrac{a}{2} \leqslant r \leqslant a\right) \end{cases} \tag{26}$$

对应的折射率分布公式为

$$\begin{cases} n_I(r,\ t_1) = n_0\left\{\dfrac{n_a}{n_0} + \left(1 - \dfrac{n_a}{n_0}\right)\right. \\ \qquad \left.\times J_0\left(3.740\dfrac{r}{a}\right)\right\}, \quad \left(0 \leqslant r \leqslant \dfrac{a}{2}\right) \\ n_{II}(r,\ t_1) = 0.4329 n_0\left\{\left(1 + 1.310\dfrac{n_a}{n_0}\right)\right. \\ \qquad \left. - 1.9245\left(1 - \dfrac{n_a}{n_0}\right) N_0\left(2.194\dfrac{r}{a}\right)\right\}, \\ \qquad \left(\dfrac{a}{2} \leqslant r \leqslant a\right) \end{cases} \tag{27}$$

这就是用双坩埚法离子交换制造的自聚焦型光波导纤维的结构形式。在 $[0,\ a_1]$ 区域内，其折射率分布和用熔盐法离子交换制造的光波导纤维相一致，因而其光的传输特性也是一致的；但是，在 $[a_1,\ a]$ 区域内，其折射率分布则是依照零阶诺尔曼函数 $N_0(x)$ 的，这一段曲线与最佳分布曲线偏差较大，因而其光的传输特性也是较差的，所以，在这种波导中传输光波，最好是控制在 $[0,\ a_1]$ 区域中进行。

## 三、光波导弯曲时对光束路径的影响

从几何光学观点来说，光的传播路径与光程有直接的关系。波导弯曲时（如图4），其中各点的折射率 $n(r)$ 和密度 $d(r)$ 都起变化，因而光程 $L = n(l + \Delta l)$ 也起变化，这样就影响到光传输的路径了。

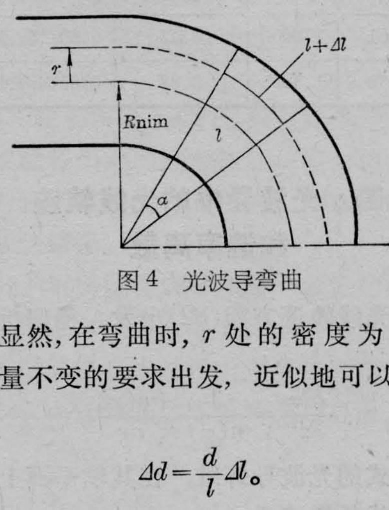


图4　光波导弯曲

显然，在弯曲时，$r$ 处的密度为 $d + \Delta d$，从质量不变的要求出发，近似地可以得到关系：

$$\Delta d = \frac{d}{l} \Delta l。 \tag{28}$$

由图4可得 $l = R\alpha$，$l + \Delta l = (R_{\min} + r)\alpha$（$R_{\min}$ 为波导弯曲容许的最小曲率半径），由此得到

$$\Delta d = d\frac{r}{R_{\min}} \tag{29}$$

注意到玻璃材料中密度 $d$ 和折射率 $n$ 的关系为 $d = Kn + C$，其中 $K$ 和 $C$ 都是玻璃的特性常数，从(29)式可以得到波导弯曲后的折射率分布为

$$n'(r) = n(r)\left[1 - \frac{d}{n(r)} \frac{r}{K R_{\min}}\right] \tag{30}$$

依据费尔马原理，经过 $r_0$ 处的光线，在波导弯曲的情况下，光线改道经过 $r$ 处，即光线路径移动了 $\delta_r=r-r_0$ 为

$$\delta_r=\left(1-\frac{d}{K}\right)\Big/AR_{\min}。\tag{31}$$

有两种配方的玻璃(见表 1)

表 1

| 配　方 (重量 %) | $SiO_2$ | PbO | $Tl_2O$ | $Na_2O$ |
|---|---|---|---|---|
| BTF-01 | 48 | 24 | 16 | 12 |
| BTF-02 | 50 | 18 | 20 | 12 |

利用燧石玻璃的关系，即 $K=8.7$，可以近似地得到如表 2 的结果：

表 2

| 玻　璃 | 参 | 数 | |
|---|---|---|---|
| | $n_D$ | $d$ (克/厘米$^3$) | $\delta_r$ |
| BTF-01 | 1.6005 | 3.47 | $0.60115/AR_{\min}$ |
| BTF-02 | 1.5898 | 3.38 | $0.61149/AR_{\min}$ |

## 四、光波导中的光线轨迹和速率离散

从光线轨迹方程(32)出发，径向折射率分布

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{1}{n(r)}\frac{\partial n(r)}{\partial r}\tag{32}$$

如(11)式的光波导纤维，在其轴平面上任意一条光线的轨迹为

$$z=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dr}{\sqrt{\ln n(r)+C_0}}+z_0\tag{33}$$

其中 $C_0$、$z_0$ 为积分常数。

(11)式的一级近似显然是一个抛物线方程

$$n(r)=n_0\left(1-\frac{1}{2}Ar^2\right)\tag{34}$$

则相应的光线轨迹为

$$r=q\cos\sqrt{A}\,z。\tag{35}$$

然后计算任意一条光线在轴平面上、在四分之一周期内的光程 $S$ 为

$$S\approx\frac{\pi n_0}{2\sqrt{A}}\left(1-\frac{5}{64}A^2q^4\right)。\tag{36}$$

而沿轴线传播的光线在四分之一周期内的光程 $S_0$ 为

$$S_0=\pi n_0/2\sqrt{A}。\tag{37}$$

那么，在 1 公里长的自聚焦型光波导纤维中，任一条光线与沿轴光线之间由于速率离散所产生的相对延迟时间 $\tau$ 为

$$\tau=\frac{5}{64}A^2q^4\Big/\frac{C}{n_0}\tag{38}$$

式中 $C$ 是真空中的光速。

## 五、自聚焦型光波导纤维的信息传输速率

假定向光波导耦合一束单模光，那么它的横向能量分布就是依照高斯曲线的。严格的高斯光束，其光能量沿径向分布到无限远处。所以，实际上光波导只能传输高斯光束的基本部分，如图 5 中的 $[-a_1, a_1]$。如果要求通信系统二个端机之间的误码率不大于 $10^{-9}$，那么由于波导传输产生的码间干扰，其串话噪音能量必须不大于信息能量的 4%，这个要求相当于

$$a_1\geqslant1.269W\tag{39}$$

式中 $W$ 是高斯光束的半宽度。这就是说，在 $[-a_1, a_1]$ 范围内的光束能量必须保证约束在波导的有效传输截面内，严格按照系统要

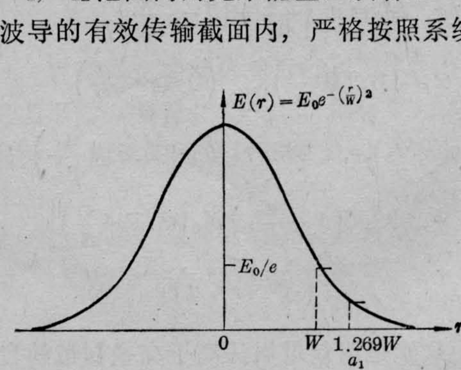

图 5　高斯光束电场强度分布

表 3

| 样品序号 | 1# | 2# | 3# | 4# | 5# | 6# | 7# | 平均值 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 分布常数 $A$(毫米)$^{-2}$ | 1.619 | 1.570 | 1.727 | 1.715 | 1.694 | 1.746 | 1.885 | 1.711±0.093 |
| 截面半径 $a_{1\max}$(微米) | 81.43 | 80.86 | 82.60 | 82.47 | 82.26 | 82.78 | 84.05 | 82.43 |
| 最大延迟 $\tau_{\max}$ ($10^{-9}$ 秒/公里) | 0.047 | 0.043 | 0.057 | 0.056 | 0.054 | 0.059 | 0.073 | 0.055 |

求的传输特性(如给定的延迟时间限制)传输。

光波导的有效传输截面可以这样来考虑。假定波导的不均匀性足够小，只考虑波导弯曲时使光线位置移动 $\delta_r$。这就是说，光波导的最大有效传输截面半径 $a_1$ 和波导的半径 $a$ 有如下的关系

$$a_1 \leqslant a-\left(1-\frac{d}{K}\right)\Big/4R_{\min}。 \quad (40)$$

考虑到光波导处于最小曲率半径的状态是小部分区段，而大部分区段是处于曲率半径远大于 $R_{\min}$ 的状态，所以，近似地可以认为 $a_1 \approx q$，这样就由式(38)和(41)得到自聚焦型光波导纤维的最大延迟时间 $\tau_{\max}$ 为

$$\tau_{\max}=\frac{5n_0A^2}{64C}\left[a-\left(1-\frac{d}{K}\right)\frac{1}{AR_{\min}}\right]^4。 \quad (41)$$

利用 BTF-01 玻璃制成了自聚焦型光波导纤维，其结构参数为 $n_0=1.5752$, $2a=200$ 微米，$A$ 值示于表 3，在容许最小曲率半径 $R_{\min}=20$ 毫米时，计算了光波导的最大有效传输截面半径 $a_{1\max}$ 和最大延迟时间 $\tau_{\max}$ (见表 3)。

## 六、结　果

利用玻璃体中一价金属离子(如 $Tl^+$、$Cs^+$ 等)的热扩散运动的物理效应来制作光波导，不管是采用熔盐法离子交换，还是采用双坩埚法离子交换，都可以得到特性优良的波导结构，它们的一级近似结构就是抛物线型的。不过要注意到，用双坩埚法制作的光波导，在 $[a_1, a]$ 区域中，折射率分布偏离最佳波导结构较远，所以这种波导在用于高速信息传输时，有效传输截面应限制在 $[0, a_1]$ 区域内进行。

这种波导的延迟时间可以小于 $10^{-10}$ 秒/公里，确实是一种高速率大容量的光波导结构形式。同时，这种抛物线型结构，就使得它也可用于直接传输图象，制作各种各样的微透镜。

## 参　考　文　献


[1] S. Kawakami, J. Nishizawa; *IEEE Trans.*, **MTT-16**, No 10, 814—818 (1968).


## 更　　正

本刊一九七九年第一期外文目录中 "Measurement of Far-Infrared Profile of CW Laser by Two Dimensional Scanning" 应为 "Measurement of Far-Field Profile of CW Laser by Two Dimensional Scanning"; JSCK-1 Digital Laser Wire-Diameter Gauge……(12)应为"JSCK-1 Digital Laser Wire-Diameter Gauge……(18); "Laser Institute of Shanghai Established……(18) 应为 "Laser Institute of Shanghai Established……(12)，特此更正。