

# 不稳定腔的频谱分析

王 维 瑞

(中国科学院上海光机所)

在激光物理学的专著中<sup>[1~3]</sup>以及关于不稳定腔的理论的专门文献中<sup>[4~6]</sup>,对不稳定腔的几何理论和衍射理论做了分析。

本文从成象的频谱分析理论出发,分析了透镜序列成象的频谱特性,把不稳定腔光路多次往返成象看做是透镜序列成象,从而得出不稳定腔在共轭象点附近的频谱特性。用傅里叶变换将共轭面上的场分布自治条件变换成共轭面上频谱自治条件。以此条件为出发点,对不稳定腔的振荡特性进行了分析,得出在振荡过程中几何光学理论所给出的会聚波不能在腔中存在。同时给出满足频谱自治条件的本征方程和频谱特性。解本征方程得到不稳定腔的共轭面上的模式分布的解析解。同时给出模式损耗及共振频率特性和它们的间隔。本文还对得到的结果进行了一些讨论。

## 一、薄透镜序列成象的频谱分析

假设有一个薄透镜序列  $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$ , 如图 1 所示。这一透镜序列满足下列条件:

(1) 透镜序列是同轴的。 $O_{n-1}$  为透镜  $L_n$  的物点,  $O_n$  为  $L_n$  的象点, 即  $O_{n-1}$  和  $O_n$  对透镜  $L_n$  是共轭的。 $O_1, O_2, \dots, O_n, \dots$  连线

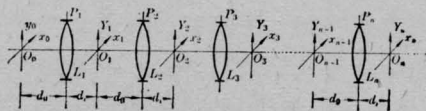


图 1 透镜序列

为透镜序列的光轴。

(2) 每两透镜之间的距离是等间距的, 间距为  $(d_i + d_o)$ 。 $d_o$  为物距,  $d_i$  为象距。物象的放大倍数为  $d_i/d_o$ , 令它等于  $M$ 。

(3) 每个透镜的参数是一样的, 并且都有一个同样大小的光阑。这里, 仅用正方形光阑, 每边长为  $l$ , 光阑中心与光轴重合并紧靠透镜。光阑函数为:

$$P(x, y) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{l}{2}, \quad |y| \leq \frac{l}{2}; \\ 0, & |x| > \frac{l}{2}, \quad |y| > \frac{l}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

(4) 每个透镜都没有象差, 并应用在近轴情况。

在以上的条件下, 我们假定在  $(x_0, y_0)$  面上有一个场分布  $U_0(x_0, y_0)$ , 这时在  $(x_0, y_0)$  面上的频谱为:

$$F(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y_0) e^{-2\pi i(f_x x_0 + f_y y_0)} dx_0 dy_0 \quad (2)$$

$f_x, f_y$  为空间频率。

场分布  $U_0(x_0, y_0)$  在透镜序列中传播。我们只要用傅里叶变换的相似定理和卷积定理<sup>[7]</sup>, 就可以得到在  $(x_n, y_n)$  面上的输出频谱特性:

$$\begin{aligned} G_{in} &= (K \lambda^2 d_i^2)^n P(-\lambda d_i f_x, -\lambda d_i f_y) \\ &P(-\lambda d_i f_x M, -\lambda d_i f_y M) \dots \\ &P(-\lambda d_i f_x M^{n-1}, -\lambda d_i f_y M^{n-1}) \\ &F(M^n f_x, M^n f_y) \end{aligned} \quad (3)$$

收稿日期: 1978年5月10日。

这里  $\lambda$  为单色光的波长,  $K$  为复常数因子。

下面根据 (3) 式分三种情况分析:

(1) 当  $|M| > 1$  时, 假定  $F(M^n f_x, M^n f_y)$  为有限大小, 根据 (1) 式和 (3) 式可得  $G_{in}$  频谱的通带宽为:

$$f_{0x} = \frac{l}{2\lambda d_i M^{n-1}}; \quad f_{0y} = \frac{l}{2\lambda d_i M^{n-1}} \quad (4)$$

输出频谱为:

$$G_{in} = (K\lambda^2 d_i^2)^n P(-\lambda d_i f_x M^{n-1}, -\lambda d_i f_y M^{n-1}) F(M^n f_x, M^n f_y) \quad (5)$$

这里可以看出频谱由三部分的乘积组成, 一部分是复常数项因子  $(K\lambda^2 d_i^2)^n$ , 一部分为带宽函数  $P$ , 另一部分是我们称作频谱分布函数的  $F$ 。

可以看出当  $n \rightarrow \infty$  即无限透镜序列, 由带宽函数可得:

$$f_{0x} = 0, \quad f_{0y} = 0 \quad (6)$$

也就是说, 当  $|M| > 1$ , 对无限透镜序列通频带宽为零。

(2) 当  $|M| = 1$  时, 同样可得通频带宽为:

$$f_{0x} = \frac{l}{2\lambda d_i}; \quad f_{0y} = \frac{l}{2\lambda d_i} \quad (7)$$

频谱为:

$$G_{in} = (K\lambda^2 d_i^2)^n P(-\lambda d_i f_x, -\lambda d_i f_y) F(f_x, f_y) \quad (8)$$

也是由三部分乘积组成, 其中包括了带宽函数  $P$  和频谱分布函数  $F$ 。

对无限透镜序列, 通频带宽同 (7) 式给出的结果一样。

(3) 当  $|M| < 1$  时, 可得通频带宽为:

$$f_{0x} = \frac{l}{2\lambda d_i}; \quad f_{0y} = \frac{l}{2\lambda d_i} \quad (9)$$

频谱为:

$$G_{in} = (K\lambda^2 d_i^2)^n P(-\lambda d_i f_x, -\lambda d_i f_y) F(M^n f_x, M^n f_y) \quad (10)$$

它也是由三部分的乘积组成的。

对无限的透镜序列通频带和 (9) 式一样。

## 二、不稳定腔自洽条件的频谱分析

### 1. 不稳定腔的光路和自洽条件分析

图 2 所示光路是双凸型不稳定腔的光路示意图。它满足几何光学理论的自洽条件, 即在轴上一点  $O$  经腔镜  $M_1$  和  $M_2$  反射后仍然成象在  $O$  点的位置。基波用实线箭头标出, 会聚波用虚线箭头标出, 前者波面横向放大率为  $M'$ , 后者则缩小  $M'$  倍。

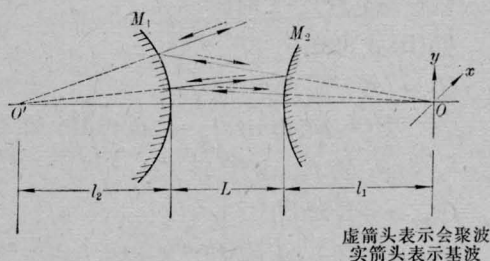


图 2 不稳定腔光路示意图

我们知道, 不稳定腔完全可以看作是一个透镜序列光学多次成像系统。所以图 2 所示不稳定腔自洽象面频谱特性, 可以通过对图 1 所示的透镜序列而得出。腔镜有限大小, 等效于透镜序列每个透镜上有一个光阑  $P$ 。而  $d_i$ 、 $d_0$  与  $l_1$ 、 $l_2$ 、 $L$  有着一定的关系, 这里不去推导它, 因为它对我们的讨论并没有影响。另外可以直接给出  $M = \frac{d_i}{d_0} = \frac{1}{M'}$ , 这就是说波面横向放大率与象放大率成倒数关系。

从图 1 中可知, 由于考虑衍射效应满足成象一次 (即不稳定腔光路往返一次) 自洽条件应为:

$$U_n(x_n, y_n) = r U_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}) \quad (11)$$

$r$  为复常数因子,  $n$  表示任一物面或象面的序数,  $U_n$ 、 $U_{n-1}$  表示往返一次在自洽面上的场分布。将 (11) 式两边同时进行傅里叶变换得:

$$G_{in}(f_x, f_y) = r G_{in-1}(f_x, f_y) \quad (12)$$

(11) 式和 (12) 式是等价的, 我们把 (12) 式称

为频谱自洽条件。它表明不稳定腔自洽面上的频谱当光路往返一次时频谱相差一个复常数因子  $r$ 。

## 2. 分析三种情况的自洽

由透镜序列成象的频谱分析表明,任一象面的输出频谱由频谱分布函数和带宽函数及复常数因子三部分乘积组成。为了满足(12)式自洽条件,就要求带宽函数一样,同时也要求频谱分布函数相似才行。

下面分三种情况说明之:

(1) 当  $|M| > 1$  时

据(5)式可知:

$$\begin{aligned} G_{in} &= (K\lambda^2 d_i^2)^n \\ &P(-\lambda d_i f_x M^{n-1}, -\lambda d_i f_y M^{n-1}) \\ &F(M^n f_x, M^n f_y) \\ G_{in-1} &= (K\lambda^2 d_i^2)^{n-1} \\ &P(-\lambda d_i f_x M^{n-2}, -\lambda d_i f_y M^{n-2}) \\ &F(M^{n-1} f_x, M^{n-1} f_y) \end{aligned}$$

从上两式可以看出  $G_{in}$  和  $G_{in-1}$  的带宽是不一样的,  $G_{in}$  比  $G_{in-1}$  带宽窄  $M$  倍。如果无限传输下去,带宽不断地变窄,但永远不能相等。当  $n \rightarrow \infty$ , 带宽为零。这就说明永远不能满足自洽条件——即带宽函数永远不一样。这表明当  $|M| > 1$  时不能在腔中形成稳定的振荡波型, 也就是说不稳定腔中会聚波不能存在。

(2) 当  $|M| = 1$  时,

根据(8)式可得

$$\begin{aligned} G_{in} &= (K\lambda^2 d_i^2)^n P(-\lambda d_i f_x, -\lambda d_i f_y) \\ &F(f_x, f_y) \\ G_{in-1} &= (K\lambda^2 d_i^2)^{n-1} P(-\lambda d_i f_x, -\lambda d_i f_y) \\ &F(f_x, f_y) \end{aligned}$$

如果令  $r = K\lambda^2 d_i^2$ , 则满足(12)式。

这表明只要空间频率在

$$|f_{0x}| \leq \frac{l}{2\lambda d_i}, \quad |f_{0y}| \leq \frac{l}{2\lambda d_i}$$

范围内, 任何一个有意义的  $F(f_x, f_y)$  都可以构成该谐振腔的模式。这种情况是一种稳定腔和不稳定腔的临界情况。

(3) 当  $|M| < 1$  时

从公式(10)可知

$$\begin{aligned} G_{in} &= (K\lambda^2 d_i^2)^n P(-\lambda d_i f_x, -\lambda d_i f_y) \\ &F(M^n f_x, M^n f_y) \\ G_{in-1} &= (K\lambda^2 d_i^2)^{n-1} \\ &P(-\lambda d_i f_x, -\lambda d_i f_y) \\ &F(M^{n-1} f_x, M^{n-1} f_y) \end{aligned}$$

可以看出两式带宽函数一样, 为了满足(12)式自洽条件, 还必须要求满足下式:

$$\begin{aligned} r F(M^{n-1} f_x, M^{n-1} f_y) \\ = K\lambda^2 d_i^2 F(M^n f_x, M^n f_y) \end{aligned} \quad (13)$$

这就是不稳定腔的本征方程。由(13)式解出的  $F$ , 再与带宽函数相乘进而得到  $G_n$ , 这才是不稳定腔振荡的特征模式。

## 三、不稳定腔的振荡模式和它的损耗及纵模共振频率特性

由上面分析可知  $|M| > 1$  时不存在振荡模式,  $|M| = 1$  是稳定和不稳定腔的临界情况。因此分析不稳定腔的振荡模式只要分析  $|M| < 1$  的情况就足够了。

### 1. 不稳定腔的振荡模式

为了求振荡模式, 我们只要解方程(13)就可以了。从方程(13)中不难看出, 令

$$\begin{aligned} F(M^{n-1} f_x, M^{n-1} f_y) &= C_{jk} f_x^j f_y^k \\ (j, k &= 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (14)$$

和

$$r_{jk} = K\lambda^2 d_i^2 M^{j+k} \quad (15)$$

则(14)式满足本征方程(13)。这里  $C_{jk}$  是常数因子。由此得出本征模式的频谱为:

$$G_{j,k} = C_{jk} P(-\lambda d_i f_x, -\lambda d_i f_y) f_x^j f_y^k \quad (16)$$

为了求在共轭面上的场分布, 只要做傅里叶反演积分

$$U_{j,k}(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} G_{j,k} e^{i2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y \quad (17)$$

就可以得出。

下面仅列出几个简单的结果:

$$U_{00} = C_{00} \frac{\sin \frac{\pi l}{\lambda d_i} x \sin \frac{\pi l}{\lambda d_i} y}{\pi^2 xy}$$

$$U_{10} = C_{10} \frac{1}{i2\pi x} \left[ \frac{l}{\lambda d_i} \cos \frac{\pi l}{\lambda d_i} x - \frac{\sin \frac{\pi l}{\lambda d_i} x}{\pi x} \right] \frac{\sin \frac{\pi l}{\lambda d_i} y}{\pi y}$$

$$U_{11} = C_{11} \frac{1}{4\pi^2 xy} \left[ \frac{l}{\lambda d_i} \cos \frac{\pi l}{\lambda d_i} x - \frac{\sin \frac{\pi l}{\lambda d_i} x}{\pi x} \right] \left[ \frac{l}{\lambda d_i} \cos \frac{\pi l}{\lambda d_i} y - \frac{\sin \frac{\pi l}{\lambda d_i} y}{\pi y} \right]$$

## 2. 不稳定腔的模式损耗

根据专著[7]可以推出

$$K\lambda^2 d_i^2 \approx M e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (d_i + d_0)} \quad (18)$$

再根据式(15)可得

$$r_{j,k} = M^{j+k+1} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (d_i + d_0)} \quad (19)$$

我们知道谐振腔单次往返损耗为

$$\delta_{单jk} = 1 - (r_{jk})^2$$

因此不稳定腔对某一特定模式的损耗为

$$\delta_{单jk} = 1 - M^{2(j+k+1)} \quad (20)$$

由上式可以看出: 模的阶数越高, 损耗越大。

$|M|$  越小于 1 时损耗也越大, 由此可知  $|M|$  越小于 1 时不稳定腔抑制高次模越有效。另外也不难看出当  $|M|$  一定时,  $(0, 0)$  模的损耗最小而且为  $\delta_{单(0,0)} = 1 - M^2$ , 这和几何光学理论结果一致。

## 3. 不稳定腔的纵模共振频率特性

由(19)式可知, 共振频率条件应满足:

$$\frac{2\pi}{\lambda} (d_i + d_0) = 2m\pi \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (21)$$

由此得出共振频率为

$$\nu = \frac{mc}{d_0 + d_i} \quad (22)$$

频率间隔为

$$\Delta\nu = \frac{c}{d_i + d_0} \quad (23)$$

$\Delta\nu$  与  $d_i$  和  $d_0$  有关, 而  $d_i$  和  $d_0$  都与腔镜的曲率  $R_1$  和  $R_2$  以及它们的间距  $L$  有关。

## 结 语

我们这里只讨论了方镜情况, 但并不影响结果的普遍意义, 也就是说不难推广到圆形、长方形镜等情况。

## 参 考 文 献

- [1] 《激光物理学》, 上海人民出版社, 1975.
- [2] 《固体激光导论》, 上海人民出版社, 1975.
- [3] 《激光物理》, 朱如曾, 封开印编辑, 国防工业出版社.
- [4] Ю. А. Ананьев; *Квантовая электроника*, 1971, № 6, 3~34.
- [5] R. L. Sanderson, W. Strerper; *Appl. Opt.*, 1969, 8, No 10, 2129~2136.
- [6] A. E. Siegman, H. Y. Miller; *Appl. Opt.*, 1970, 9, No 12, 2729~2736.
- [7] J. W. Goodman, 《傅里叶光学导论》, 科学出版社.