

# 在真空中电磁场的梯度矢势

邓锡铭 方洪烈

(中国科学院上海光机所)

## The gradient vector potential of the electromagnetic field in vacuum

Teng Ximing Fang Honglie

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

### Abstract

There is a gradient vector potential in electromagnetic field. A tensor of the internal tension of electromagnetic field has been derived from it. The existence of this tension is the origin of the phenomena of diffraction, interference etc.

人们对于电磁场的认识已经很深入了,已经认识到电磁场是物质存在的一种形式,电磁场的传播可以由麦克斯韦(Maxwell)方程完全确定。

由麦克斯韦方程可以引出电磁场的连续性方程如下:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \vec{S} = 0. \quad (1)$$

其中  $\rho$  是电磁场的能量密度,它等于:

$$\rho = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2), \quad (2)$$

$\vec{S}$  是玻印廷(Poynting)矢量

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}. \quad (3)$$

方程(1)给我们一种启发,即电磁场类似于一种流体。为此本文采用一个内部存在某种张力的场流体模型来描述真空中电磁场的稳态传输过程,即电磁场在真空中的稳态传输过程可由如下两个方程完全描述:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_0^2 + \nabla [\phi_0^2 (c\nabla L)] = 0, \quad (4)$$

$$\vec{\varphi} = -\frac{1}{2h^2} \left( \frac{\nabla \phi_0}{\phi_0} \right). \quad (5)$$

方程(4)是一个连续性方程。它表明能量守恒,或者说场流体质量守恒。 $\phi_0^2$  代表时间平

均的场能量密度(正比于场矢量在一个坐标轴上的分量的平方)。 $\phi_0^2/c^2$ 表示流体密度; $c\nabla L$ 表示流体速度。(4)式与(1)式的区别在于它标出了流体的速度: $(c\nabla L)$ 。其中 $L$ 是准程函,与 $\phi_0$ 有如下关系<sup>[4]</sup>:

$$(\nabla L)^2 = 1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\nabla^2 \phi_0}{\phi_0}, \quad (6)$$

其中 $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ ,  $\lambda_0$ 是真空中波长。

方程(5)是表征内部张力的一个梯度矢势 $\vec{\varphi}$ (以下简称矢势)。它表明:场流体内部有张力存在(矢势的梯度就是张力,由一个张量来表示。但是与普通电动力学中的张力张量是两回事)。这种张力与场流体的静止质量和内禀运动密切相关<sup>[4]</sup>,是产生衍射、干涉等波动现象的根源。

对于稳态传输情况有 $\partial\phi_0^2/\partial t = 0$ ,这样,由方程(4)得到:

$$\nabla[\phi_0^2(c\nabla L)] = 0. \quad (7)$$

将(7)式展开得到:

$$\nabla^2 L = -2 \frac{\nabla L \nabla \phi_0}{\phi_0}. \quad (8)$$

原则上,应用(4)、(5)基本方程及其推论(6)、(8)即可得出真空中光束的衍射、干涉传输过程,而不需要惠更斯(Huygens)-菲涅耳(Fresnel)和克希霍夫(Kirchhoff)衍射理论;也不需要直接解波动方程。

在这里,采用了一个场流体模型取代了波动的概念。矢势方程(5)的存在,是这种流体满足相对论力学的必然结果。而几何光学是令矢势方程处处为零的结果。因此,几何光学向波动光学的过渡,实质上是对应于经典力学向相对论力学的过渡。而通常的说法是:对应于经典力学向波动力学的过渡(即量子力学)。而波动力学更深的本质应该是相对论力学。波动特性只不过是相对论力学规律支配的一种表面现象而已。

第一基本方程(4)是连续性方程,这是所有流体共有的。但是,第二基本方程(5)是电磁场所特有的。由该方程可得到场流体内部的张力张量 $\vec{\Phi}$ :

$$\vec{\Phi} = \phi_0^2(-\nabla\vec{\varphi}) = - \begin{pmatrix} \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} & \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} & \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \\ \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} & \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} & \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} & \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} & \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

用 $\vec{T}_x$ 、 $\vec{T}_y$ 、 $\vec{T}_z$ 分别代表垂直于 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 轴的单位截面上的张力; $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 、 $\vec{e}_3$ 分别代表沿 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 轴的单位矢量,则有:

$$\left. \begin{aligned} \vec{T}_x &= -\phi_0^2 \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \vec{e}_3 \right), \\ \vec{T}_y &= -\phi_0^2 \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \vec{e}_3 \right), \\ \vec{T}_z &= -\phi_0^2 \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} \vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \vec{e}_3 \right). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

作用于单位体积场流体的张力 $\vec{T}_0$ 等于:

$$\begin{aligned} \vec{T}_0 = \nabla \vec{\Phi} = & - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} \right) \right] \vec{e}_1 \\ & - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \right) \right] \vec{e}_2 \\ & - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \right) \right] \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (11)$$

下面用我们引进的矢势方程(5)来讨论、处理几个具体问题。

### 例一, 匀幅平面波和匀幅相交平面波

对于匀幅平面波,  $\nabla \phi_0$  处处为零, 即在场流体内张力处处为零。故流体内每一部分都不受力的作用, 以匀速  $c$  沿波矢方向运动。这种波在传播的过程中不发生衍射。

其次, 对于匀幅相交平面波, 假定振幅及偏振彼此相同。由于干涉理论知道,  $\phi_0$  等于:

$$\phi_0 = A_0 \cos(k_0 x \sin \theta). \quad (12)$$

图 1 中标出了两平面波的波矢,  $A_0$  是与坐标无关的常数。

(12) 式代入(5)、(10)式得到:

$$\begin{aligned} \vec{T}_y = \vec{T}_z = 0; \\ \vec{T}_x = -\phi_0^2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \vec{e}_1 = -\frac{1}{2} A_0^2 \sin^2 \theta \vec{e}_1. \end{aligned} \quad (13)$$

垂直于  $Y$ 、 $Z$  轴截面上的张力处处为零, 垂直于  $X$  轴截面上的张力处处相等。(12) 式代入(5)、(11) 式得:

$$\vec{T}_0 = 0. \quad (14)$$

即作用于单位体积场流体上的体张力处处为零, 故每部分流体都以匀速沿  $Z$  轴运动。亦即在垂直于  $Z$  轴任一截面上干涉花样的强度分布都相同。

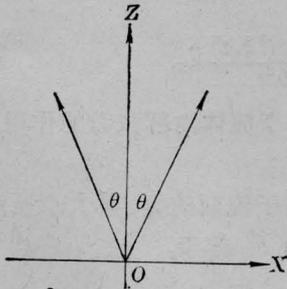


图 1 相交平面波的波矢

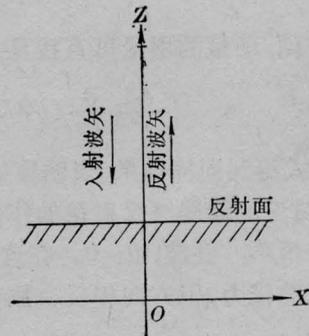


图 2 匀幅平面波的反射

### 例二, 平面反射镜对匀幅平面波的反射

为了计算简单, 令匀幅平面波垂直入射在平面反射镜上, 反射镜的反射率为  $R$ , 透过率为  $(1-R)$ , 见图 2。

由于干涉理论得到, 在反射镜的上部,  $\phi_0$  等于:

$$\phi_0^2 = a^2 \cos^2 k_0 z + b^2 \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} a^2 &= 4\phi_i \phi_r; \\ b^2 &= (\phi_i - \phi_r)^2, \end{aligned}$$

而  $\phi_i^2$ 、 $\phi_r^2$  分别代表入射、反射平面波的能量密度。

在反射镜的下部,  $\phi_0$  等于:

$$\phi_0^2 = (1-R)\phi_i^2, \quad (16)$$

代表一匀幅透射平面波。

(15)式代入(6)式得:

$$c\nabla L = \frac{cb\sqrt{a^2+b^2}}{a^2\cos^2 k_0z + b^2} \vec{e}_{3_0} \quad (17)$$

故场流体的质流矢量  $\vec{M}$  等于:

$$\vec{M} = \left(\frac{\phi_0^2}{c^2}\right) (c\nabla L) = \frac{b}{c} \sqrt{a^2+b^2}. \quad (18)$$

即在反射镜的上部, 质流矢量与  $z$  无关, 处处相等。因此, 在流体质量密度高的地方, 流速就慢, 密度低的地方流速就快。当  $R=1$ , 形成驻波, 在波节处都堵住了, 故流速 ( $c\nabla L$ ) 处处为零 ( $b=0$ ), 流体的动量密度也处处为零。

下面指出, 场流体速度的改变, 是流体内部张力作用的结果。

(15)式代入(5)、(11)式得到作用于单位体积场流体的张力  $\vec{T}_0$  等于:

$$\vec{T}_0 = \frac{k_0 a^2 b^2 (a^2 + b^2) \sin 2k_0 z}{(a^2 \cos^2 k_0 z + b^2)^2} \vec{e}_{3_0} \quad (19)$$

单位体积场流体沿  $Z$  轴流过单位距离, 由于应力作用所增加的动量  $\delta\vec{P}$  等于:

$$\delta\vec{P} = \vec{T}_0 \delta t = \vec{T}_0 \frac{1}{|c\nabla L|} \vec{e}_3$$

其中  $\delta t$  是流经单位距离所需的时间。将(17)式代入上式得:

$$\delta\vec{P} = \frac{k_0 a^2 b \sqrt{a^2 + b^2} (\sin 2k_0 z)}{c (a^2 \cos^2 k_0 z + b^2)} \vec{e}_{3_0} \quad (20)$$

另一方面, 动量的增量可直接从下式得到:

$$\frac{\phi_0^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial z} (c\nabla L) = \frac{k_0 a^2 b \sqrt{a^2 + b^2} (\sin^2 k_0 z)}{c (a^2 \cos^2 k_0 z + b^2)} \vec{e}_3, \quad (21)$$

(20)、(21)式得到同样结果, 表明流体速度的改变唯一来源于流体内部张力的作用。

其次, 讨论场流体对反射镜的作用力。

第一种情形: 驻波,  $b=0$ 。在这种情况下, 场流体作用于镜面的力, 其大小显然等于流体在镜面位置的张力, 但方向相反。故作用于单位镜面上的力  $\vec{F}_1$  等于:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_z = +\phi_0^2 \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial z} \vec{e}_1 + \frac{\partial \phi_y}{\partial z} \vec{e}_2 + \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \vec{e}_3 \right).$$

将(15)式代入上式得

$$\vec{F}_1 = -2\phi_i^2 \vec{e}_3 \quad (22)$$

这与采用点结构光子图象得到的结果是一致的。按照点图象, 入射光子密度  $\eta = \phi_i^2 / h\nu$ , 每个光子的动量  $p_0 = h\nu / c$ , 经镜面全反射每个光子给予镜面的动量为  $-2h\nu / c$ 。所以镜面上单位截面受到的光压  $\vec{F}'_1$  等于

$$\vec{F}'_1 = c\eta (-2\vec{P}_0) = -\frac{c\phi_i^2}{h\nu} \frac{2h\nu}{c} \vec{e}_3 = -2\phi_i^2 \vec{e}_3 \quad (23)$$

与(22)式结果一致。

第二种情形:  $R < 1$ ,  $b \neq 0$ 。在这种情况下, 镜面应该处在这样的位置, 即单位时间内进入

镜面的动量等于透过镜面的动量。后者显然等于:

$$\left(\frac{\phi_i^2}{c^2} c\right) c - \left(\frac{\phi_r^2}{c^2} c\right) c = \phi_i^2 - \phi_r^2. \quad (24)$$

故镜面所在的平面,下式应成立:

$$\left[\frac{\phi_0^2}{c^2} (c\nabla L)\right] (c\nabla L) = \phi_i^2 - \phi_r^2. \quad (25)$$

又从(15)、(17)式得:

$$\phi_0^2 |\nabla L| = b\sqrt{a^2 + b^2} = \phi_i^2 - \phi_r^2 \quad (26)$$

代入(25)式得:

$$|\nabla L| = 1. \quad (27)$$

在这个特定平面上,场流体在  $Z$  轴截面上的应力  $\vec{T}_z$  等于:

$$\vec{T}_z = -\phi_0^2 \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} \vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \vec{e}_3 \right)$$

将(27)、(15)式代入得

$$\vec{T}_z = 2\phi_r^2 \vec{e}_3. \quad (28)$$

与(22)式比较,这正是我们所希望的结果。因为在反射镜的后面是匀幅透射平面波,处处应力为零;而且,在流体到达镜面时  $|\nabla L| = 1$ , 等于透射平面波的  $|\nabla L|$ , 即场流体通过镜面时,动量不变,即与镜面不交换动量。因此,镜面受到的唯一的一个力就是镜面前面流体的应力(方向相反),故正好等于反射平面波动量密度通量的两倍。

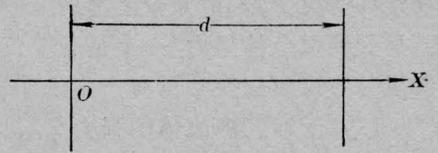


图3 法布里-珀罗(F-P)干涉仪

### 例三, 匀幅单色平面波通过 F-P 干涉仪

为了计算简单,令平面波垂直入射 F-P 干涉仪。干涉仪每面的反射率均为  $R$ , 透过率均为  $(1-R)$ , 间隔为  $d$ , 不充介质。入射波的能量密度为 1 单位(见图 3)。

由多光束干涉理论得到在干涉仪内部的能量分布:

$$\phi_0^2 = u + v \cos[2k_0(d-x)], \quad (29)$$

其中:

$$u = \frac{1-R^2}{1-2R \cos(2k_0d) + R^2}$$

$$v = \frac{2\sqrt{R}(1-R)}{1-2R \cos(2k_0d) + R^2}$$

(29)式代入(6)式得:

$$c\nabla L = \frac{c\sqrt{u^2 - v^2}}{u + v \cos[2k_0(d-x)]} \vec{e}_1. \quad (30)$$

在干涉仪内场流体的质流矢量  $\vec{M}$  等于:

$$\vec{M} = \left(\frac{\phi_0^2}{c^2}\right) (c\nabla L) = \frac{(1-R)^2}{c[1-2R \cos(2k_0d) + R^2]} \vec{e}_1, \quad (31)$$

与上例一样,  $\vec{M}$  与  $X$  无关,质流矢量处处相等。

(29)式代入(5)、(11)式得到在干涉仪内部作用于单位体积场流体的张力  $\vec{T}_0$  等于:

$$\vec{T}_0 = -\frac{2k_0b(a^2 - b^2) \sin[2k_0(d-x)]}{\{a + b \cos[2k_0(d-x)]\}^2} \vec{e}_1. \quad (32)$$

与上例一样,干涉仪内场流体速度的变化,是流体内部张力作用的结果。因为流体向前传输单位距离之后,由于应力作用所增加的动量  $\delta\vec{P}$  等于:

$$\delta\vec{P} = \vec{T}_0 \delta t = \vec{T}_0 \frac{1}{c|\nabla L|}$$

将(30)、(32)式代入上式得

$$\delta\vec{P} = -\frac{2k_0 b \sqrt{a^2 + b^2} \sin[2k_0(d-x)]}{c[a + b \cos[2k_0(d-x)]]} \vec{e}_{10} \quad (33)$$

这与直接从下式得到的结果相一致:

$$\frac{\phi_0^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial x} (c\nabla L) = -\frac{2k_0 b \sqrt{a^2 + b^2} \sin[2k_0(d-x)]}{c[a + b \cos[2k_0(d-x)]]} \vec{e}_{10} \quad (34)$$

下面讨论干涉仪两个反射面所受到的外向压力。取一种简单情形,即

$$d = m \frac{\lambda_0}{2}; \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$\cos(2k_0 d) = 1 \quad (35)$$

这时,

$$u = \frac{1+R}{1-R}; \quad v = \frac{2\sqrt{R}}{1-R} \quad (36)$$

在这种情况下,入射光束全部进入干涉仪。故干涉仪外部场流体的张力处处为零。因此,反射面只受到两个作用力:一个是干涉仪内部场流体的张力(方向相反);另一个是入射光束穿过反射镜时与镜面交换动量所产生的作用力。现分别计算如下:

(i) 干涉仪内流体的张力  $\vec{T}_x$ 。将(29)式代入(5)、(10)式得:

$$\vec{T}_x = v \frac{v+u \cos[2k_0(d-x)]}{u+v \cos[2k_0(d-x)]} \vec{e}_{10} \quad (37)$$

在镜面处,  $x=0, d$ ; 并用(35)、(36)式代入即可得到在镜面处的张力:

$$\vec{T}_x \Big|_{\substack{x=0 \\ x=d}} = v \frac{v+u}{u+v} \vec{e}_1 = \frac{2\sqrt{R}}{1-R} \vec{e}_{10} \quad (38)$$

(ii) 交换动量所产生的作用力  $\vec{F}_x$ 。(镜面接受了入射场流体的动量又给了在干涉仪内的场流体)。在镜面外部场流体动量密度通量为

$$\vec{P}_* = \frac{1}{c^2} c^2 \vec{e}_1 = \vec{e}_{10}$$

而在紧靠镜面内部的通量  $\vec{P}_{\text{内}}$  则等于:

$$\vec{P}_{\text{内}} = \frac{\phi_0^2}{c^2} (c\nabla L)^2 \vec{e}_1$$

将(29)、(30)、(35)和(36)式代入上式得

$$\vec{P}_{\text{内}} = \frac{u^2 - v^2}{u + v \cos[2k_0(d-x)]} \vec{e}_1 = (u-v) \vec{e}_1 = \frac{1-\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}} \vec{e}_{10} \quad (39)$$

最后求得

$$\vec{F}_x = \vec{P}_* - \vec{P}_{\text{内}} = \frac{2\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}} \vec{e}_{10} \quad (40)$$

故镜面单位截面所受到的总的力  $\vec{F}$  等于:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + (-\vec{T}_x)_0$$

将(38)、(40)式代入上式则得:

$$\vec{F} = -\frac{2R}{1-R} \vec{e}_1 \quad (41)$$

容易证明,右边反射镜受到同样大小的力,但方向相反。

以上结果和采用点结构光子图象得到的结果是一致的。按照这种“点”图象, F-P 干涉仪就象一个不精密的盒子。光子进入盒子之后,在两镜面之间经过多次来回弹射之后就漏走了。光子来回弹射对镜面产生的压强就是(41)式的  $\vec{F}$ 。现证明如下:

在干涉仪内,平均能量密度  $\bar{\phi}_0^2$  等于:

$$\bar{\phi}_0^2 = \frac{1}{d} \int_0^d \{u + v \cos[2k_0(d-x)]\} dx。$$

将(35)式、(36)式代入得

$$\bar{\phi}_0^2 = \frac{1+R}{1-R}。 \quad (42)$$

故单位时间内经单位面积镜面反射回去的光子数  $N$  等于:

$$N = \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{\phi}_0^2 - 1}{h\nu} \right) c = \frac{c}{2h\nu} \frac{2R}{1-R}。 \quad (43)$$

上式因子 1 的引入是考虑到光子进入和离开干涉仪的那个单程对镜面不产生反冲力。故来回弹射对镜面产生的压强  $\vec{F}'$  等于:

$$\vec{F}' = N \left( -\frac{2h\nu}{c} \vec{e}_1 \right) = \frac{2R}{1-R} \vec{e}_1 \quad (44)$$

结果与(41)完全一致。

除此以外,还可以从矢势方程、场流体的观点出发,导出 F-P 干涉仪的滤波能力。如果  $\Delta t$  代表场流体进入干涉仪到离开干涉仪的时间。那么,干涉仪的滤波能力  $\Delta\nu$  必需满足:

$$\Delta t \Delta\nu \approx 1。 \quad (45)$$

就如同一个光子从进入到离开一个原子的时间为  $\Delta t$  的话,那么,原子发射这个光子的频宽  $\Delta\nu$  就自然等于  $1/\Delta t$ 。

场流体在干涉仪内停留的时间  $\Delta t$  显然等于

$$\Delta t = \int_0^d \frac{dx}{|c \nabla L|}$$

将(30)、(35)、(36)式代入得

$$\Delta t = \left( \frac{1+R}{1-R} \right) \frac{d}{c}。 \quad (46)$$

因此,干涉仪的滤波能力  $\Delta\nu$  等于:

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{\Delta t} = \left( \frac{1-R}{1+R} \right) \frac{c}{d}。 \quad (47)$$

这与用多光束干涉理论得到的结果相符合。

#### 例四, 一维高斯光束的传输

采用一维高斯光束是为了计算简便,其结果很容易推广到二维。由标量衍射理论得到高斯光束的能量密度分布满足(沿  $Y$  轴方向只取厚度为 1 单位的一层来讨论):

$$\phi_0^2 = A_0 \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{2x^2}{\sigma^2}\right), \quad (48)$$

其中:

$$\sigma = \frac{1}{k_0 \sigma_0} \sqrt{k_0^2 \sigma_0^4 + 4z^2},$$

此外,

$$R_0 = \frac{k_0^2 \sigma_0^4 + 4z^2}{4z}, \quad (49)$$

而  $\sigma_0$  是光腰半径;  $A_0$  是与坐标无关的常数;  $R_0$  是等相位面曲率半径, 且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2 dx = 1.$$

(48)、(49)式是取旁轴近似的结果, 即

$$\sigma_0 = \xi \lambda_0, \quad \xi \gg 1. \quad (50)$$

传输光路见图 4。

下面首先导出, 光束从光腰(该处  $R_0 = \infty$ )开始的衍射发散过程是由于场流体内部张力作用的结果。

将(48)式代入(5)、(11)式得到作用于单位体积高斯光束的体张力  $\vec{T}_0$  等于:

$$\begin{aligned} \vec{T}_0 = \nabla \cdot \vec{\Phi} = & - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} \right) \right] \vec{e}_1 \\ & - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \right) \right] \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (51)$$

即:

$$\begin{aligned} \vec{T}_0 = & \frac{4x\phi_0^2}{k_0^2\sigma^4} \left( 1 + \frac{2}{k_0^2\sigma_0^2} - \frac{24z^2}{k_0^4\sigma_0^4\sigma^2} + \frac{16x^2z^2}{k_0^4\sigma_0^4\sigma^4} \right) \vec{e}_1 + \frac{4x\phi_0^2}{k_0^2\sigma^4} \left[ \frac{2z}{k_0^2\sigma_0^2} \left( -\frac{4x}{\sigma^2} + \frac{1}{x} \right) \right. \\ & \left. + \frac{z}{k_0^4\sigma_0^4} \left( \frac{16x^3}{\sigma^4} - \frac{48x}{\sigma^2} + \frac{7}{x} \right) + \frac{4z^3}{k_0^6\sigma_0^6} \left( -\frac{64x^3}{\sigma^6} + \frac{120x}{\sigma^4} - \frac{10}{\sigma^2x} \right) \right] \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (52)$$

在  $\phi_0^2$  显著不趋于零的区域(即  $|x| \leq \sigma$ )。并由于

$$\sigma_0 = \xi \lambda_0,$$

因此  $1/(k_0^2\sigma_0^2)$  是二级小量,  $1/(k_0^4\sigma_0^4)$  是四级小量, 余类推; 此外, 从(48)式的付表式可得出:

$$\frac{z}{k_0\sigma_0\sigma} < \frac{1}{2}; \quad \sigma > \sigma_0 \text{ 时}. \quad (53)$$

这样: (52)式中  $\vec{e}_1$  分量中的第 2、3、4 个因子都是二级小量;  $\vec{e}_3$  分量中括弧内的第一大项是一级小量, 其余两大项都是三级小量。因此, 如果忽略一级以及一级以上的小量, 则:

$$\vec{T}_0 = \frac{4x\phi_0^2}{k_0^2\sigma^4} \vec{e}_1. \quad (54)$$

如果忽略二级以及二级以上的小量, 则:

$$\vec{T}_0 = \frac{4x\phi_0^2}{k_0^2\sigma^4} \left[ \vec{e}_1 + \frac{2z}{k_0^2\sigma_0^2} \left( -\frac{4x}{\sigma^2} + \frac{1}{x} \right) \vec{e}_3 \right]. \quad (54)'$$

现在采用(54)近似式。考虑在  $(x, z)$  处单位体积的场流体, 它的动量密度矢量与  $Z$  轴的夹角等于  $\theta$ 。从  $A$  点传输到  $B$  点(见图 5)的过程中, 由于横向(沿  $X$  轴方向)体张力的作用, 流体的动量增量  $d\vec{P}$  等于:

$$d\vec{P} = \vec{T}_0 dt \simeq \vec{T}_0 \frac{dz}{c} = \frac{4x\phi_0^2}{ck_0^2\sigma^4} dz \vec{e}_1. \quad (55)$$

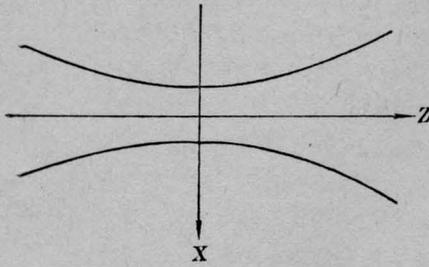


图 4 高斯光束的传输光路

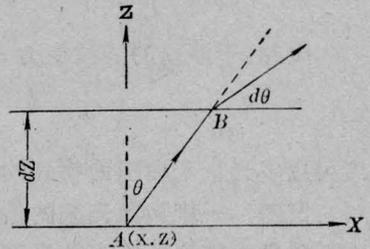


图 5 高期光束动量的变化

(55)式取了两个近似, 即:  $\overline{AB} \simeq dz$ ;  $c|\nabla L| \simeq c$ 。在  $\sigma_0 = \xi\lambda_0$  以及在  $\phi_0^2$  明显不趋于零的区域内, 这是合理的, 忽略的都是一级以上的小量。

所以, 到达  $B$  点后场流体动量密度矢量的偏转角等于:

$$d\theta \simeq \frac{|d\vec{P}|}{|\vec{P}|} = \frac{4x\phi_0^2 dz}{ck_0^2\sigma^4} = \frac{\phi_0^2}{c} dz, \quad (56)$$

即

$$d\theta = \frac{4x}{k_0^2\sigma^4} dz. \quad (57)$$

另一方面, 偏转角  $d\theta$  可以从(48)、(49)式直接微分得到, 即

$$d\theta = \frac{\partial\theta}{\partial z} dz + \frac{\partial\theta}{\partial x} dx. \quad (58)$$

由图 5 知道:  $dx = \theta dz$ , 代入(58)式得:

$$d\theta = \left( \frac{\partial\theta}{\partial z} + \theta \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) dz. \quad (59)$$

考虑到:  $\theta \simeq x/R_0$ , 故

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{R_0}, \quad (60)$$

另一方面又可从(49)式得:

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{x}{R_0} \left( \frac{k_0^2\sigma_0^4}{4z^2} - 1 \right). \quad (61)$$

将(60)、(61)、(48)、(49)式代入(59)式得:

$$d\theta = \frac{4x}{k_0^2\sigma^4} dz. \quad (62)$$

(62)式的结果与(57)式相符合, 前者是由衍射理论得到的, 后者是考虑到张力作用得到的结果。两个结果的一致表明, 矢势方程支配了光束衍射发散过程; 不考虑矢势  $\vec{\phi}$  的作用, 就回到几何光学。

上面的讨论还表明, 只要给定了初始条件, 就可以推算光束传输到下一个截面的波矢分布。然后引用(8)式, 可以确定下一个截面的能量密度分布, 从而完整地描述了整个传输过程。现在推导如下: 将(8)式展开:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (\nabla L)_x + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla L)_y + \frac{\partial}{\partial z} (\nabla L)_z \\ &= -\frac{1}{\phi_0^2} \left[ (\nabla L)_x \frac{\partial}{\partial x} \phi_0^2 + (\nabla L)_y \frac{\partial}{\partial y} \phi_0^2 + (\nabla L)_z \frac{\partial}{\partial z} \phi_0^2 \right], \end{aligned} \quad (62)$$

因高斯光束是一维的, 故有:

$$\frac{\partial}{\partial y} (\nabla L)_y = (\nabla L)_y \frac{\partial}{\partial y} \phi_0^2 = 0. \quad (63)$$

由旁轴近似条件得:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\nabla L)_z \simeq 0; \quad (\nabla L)_z \simeq 1. \quad (64)$$

(63)、(64)式代入(62)式得:

$$\frac{\partial\phi_0^2}{\partial z} = -\left[ \frac{\partial\phi_0^2}{\partial x} (\nabla L)_x + \phi_0^2 \frac{\partial}{\partial x} (\nabla L)_x \right] \quad (65)$$

将(48)、(49)式代入,并考虑到旁轴近似:

$$(\nabla L)_x \simeq \frac{x}{R_0} = \frac{4xz}{k_0^2 \sigma_0^2 \sigma^2} \quad (66)$$

最后得到:

$$\frac{\partial \phi_0^2}{\partial z} = \frac{4z\phi_0^2}{k_0^2 \sigma_0^2} \left( \frac{4x^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2} \right). \quad (67)$$

由(67)式自然可以确定下一个截面的  $\phi_0^2$ 。为了验证(67)式的正确性,可对(48)式直接微分得:

$$\frac{\partial \phi_0^2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{A_0}{\sigma} e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} \right) = \frac{4z\phi_0^2}{k_0^2 \sigma_0^2} \left( \frac{4x^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2} \right). \quad (68)$$

与(67)式的结果相符合。

其次再讨论一个问题: 在高斯光束光腰处放一块全吸收的平板。问作用于全吸收板上的总压力是多少?

一般说来,应受到两个力: 一个是场流体的张力(方向相反); 另一个是场流体的冲力。先算总张力  $\vec{\mathcal{F}}_z$ :

$$\vec{\mathcal{F}}_z = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{T}_z dx$$

将(10)式代入上式得

$$\vec{\mathcal{F}}_z = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2 \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} \vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \vec{e}_3 \right) dx. \quad (69)$$

考虑到对称关系,得:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2 \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} \vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \vec{e}_2 \right) dx = 0. \quad (70)$$

因此

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{F}}_z &= - \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2 \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \vec{e}_3 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{k_0^4 \sigma_0^2} \left( \frac{4x^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2} \right) - \frac{8z^2}{k_0^6 \sigma_0^4} \left( \frac{8x^2}{\sigma^6} - \frac{1}{\sigma^4} \right) \right] \phi_0^2 \vec{e}_3 dx \end{aligned} \quad (71)$$

对于  $z=0$  点,由上式得

$$\vec{\mathcal{F}}_z = 0 \quad (71)'$$

因此,在光腰处,对整块吸收板来说,只受到场流体的冲力  $\vec{\mathcal{F}}$ ,它等于:

$$\vec{\mathcal{F}} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\phi_0^2}{c^2} \right) (C\nabla L)^2 \vec{e}_3 dx. \quad (72)$$

在光腰处,  $(\nabla L)^2$  等于:

$$(\nabla L)_{z=0}^2 = \left( 1 - \frac{2}{k_0^4 \sigma_0^4} - \frac{2}{k_0^2 \sigma_0^2} \right) + \left( \frac{8}{k_0^6 \sigma_0^6} + \frac{4}{k_0^2 \sigma_0^4} \right) x^2. \quad (73)$$

将(48)式、(73)式代入(72)式得:

$$\vec{\mathcal{F}}_{z=0} = \left( 1 - \frac{1}{k_0^2 \sigma_0^2} \right) \vec{e}_3. \quad (74)$$

与吸收同样能量的匀幅平面波所受到的冲力相比较,相差一个因子  $(-1/k_0^2 \sigma_0^2)$ 。这表明,即使在光腰处,等相位面是平面,板上受到的冲力仍小于相应的匀幅平面波。

### 参 考 文 献

[1] 邓锡铭,方洪烈,《激光》,1978,5, No. 5~6, 143.