理论分析

氮分子激光器中的平行板传输线分析*

谢 泉

（湖南师范学院物理系）

提 要

本文对氮分子激光器中的平行板传输线作了系统的分析，并以矩形板传输线为例作了定量的计算，结果和实验一致。

目前通行的氮分子激光器，系采用平行平面金属板作为传输线的布鲁林(Blumlein)电路。这种电路的示意图如图1所示。T为传输线，除了和激光通道相连的这边为直线外，边界S的其他部分做成矩形(图1(a))或抛物线形(图1(b))，$P(x_0, y_0)$为火花隙引线的接触点。为了提高电压脉冲的幅度，对于矩形板通常把$P(x_0, y_0)$放在矩形板的一个角顶；对于抛物线形板，通常把$P(x_0, y_0)$放在抛物线的焦点上。下面的分析表明，抛物线形板比矩形板效果更好；我们的实验也证明了这一点。为了使矩形板激光通道内各点的

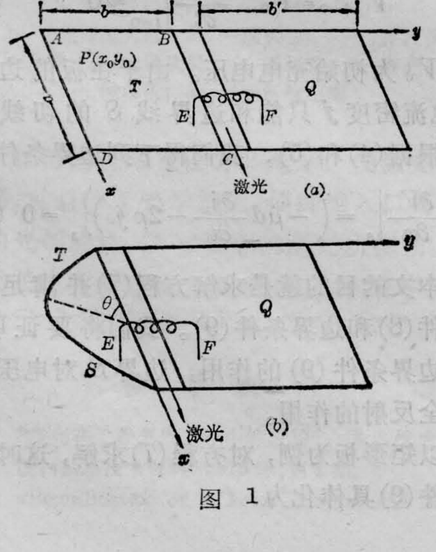

图 1

放电激励时间不致落后于超辐射激光到达该点的时间起见，通常使矩形板两边长度a和b之比满足下列关系：

$$a/b \leqslant 2\sqrt{\varepsilon_r}/(\varepsilon_r-1) \tag{1}$$

式中ε_r为两板间介质的相对介电常数，a为连接激光通道这边的边长，b为另一边的长度。为了增加激光通道的长度，(1)中通常取等号。对于抛物线板，为了使激光通道内各点的放电激励和超辐射激光到达该点正好同时，通常使激光通道和抛物线的轴成一角度θ，而

$$\cos\theta = 1/\sqrt{\varepsilon_r} \tag{2}$$

图1中Q为储能电容器，边界为矩形。EF为连接T和Q的小电感(约为十几个微亨)，起着自动开关的作用。充电时，由于高压变压器本身感抗比较大，充电时间较长，T和Q可以看作是接通的，这时的电路可以作为集中参数电路来处理，问题是比较简单的。放电时由于平行板的电感很小，放电时间非常短促，这时必须考虑电压脉冲的传输问题。

为了求出电压脉冲的传播方程，我们把平行平面金属板的上下两板，相对地分为许多矩形面元$\Delta x\,\Delta y$(图2)，每一面元可以看作是空间网络的一个元素，则平行平面金属

* 收稿日期：1978年3月7日。

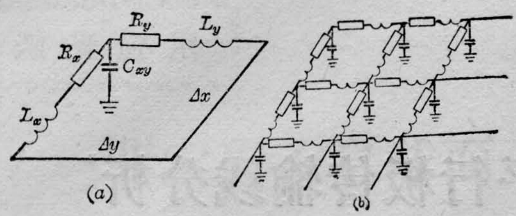

图 2

板的传输问题，归结为图 2(b) 的空间网络问题。图中

$$\left.\begin{aligned} &C_{xy}=\Delta x\,\Delta y\,\varepsilon/d \\ &L_x=\mu d\,\Delta x/\Delta y, \quad L_y=\mu d\,\Delta y/\Delta x \\ &R_x=2\rho\,\Delta x/\Delta y, \quad R_y=2\rho\,\Delta y/\Delta x \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

式中 ρ 为金属板的面电阻率，d 为两金属板中间的距离，μ 为其中介质的导磁率，ε 为介电常数。R_x 和 R_y 为什么要乘上因子 2，是考虑到上下两板的关系。按实际情况应该把 L_x、R_x、L_y 和 R_y 都除以 2，然后对称地分布在上下两个面上。现在我们把参数统统集中在上一个面上完全是为了便于讨论。

设 $V(x, y, t)$ 为上下两板在对应点 (x, y) 的电势差，$\boldsymbol{j}(x, y, t)$ 为上板在对应点的面电流密度，由于对称关系，我们假定下板的面电流密度和上板大小相等方向相反。仿照传输线的理论有

$$-\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x=L_x\frac{\partial}{\partial t}(j_x\,\Delta y)+R_x(j_x\,\Delta y)$$

用(3)代入上式，两边约去 Δx，得

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=\mu d\frac{\partial j_x}{\partial t}+2\rho\,j_x \tag{4}$$

同样有

$$-\frac{\partial V}{\partial y}=\mu d\frac{\partial j_y}{\partial t}+2\rho j_y \tag{5}$$

又由电流的连续方程，得

$$\frac{\partial}{\partial x}(j_x\,\Delta y)\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}(j_y\,\Delta x)\Delta y$$
$$=-C_{xy}\frac{\partial V}{\partial t}-I(t)\,\Delta x\,\Delta y\,\delta(x-x_0)\times\delta(y-y_0)$$

式中 $\delta(x)$ 为狄拉克函数。用(3)代入上式，两边约去 $\Delta x\,\Delta y$，得

$$\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}=-\frac{\varepsilon}{d}\frac{\partial V}{\partial t}-I(t)\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0) \tag{6}$$

式中 $I(t)$ 为放电电流，即从上板 $P(x_0, y_0)$ 处流向下板的电流。

由(3)、(4)、(5)三式消去 j_x 和 j_y，我们得

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\frac{2\rho}{\mu d}\frac{\partial V}{\partial t}-v^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)=-\frac{d}{\varepsilon}\left[\dot{I}(t)+\frac{2\rho}{\mu d}I(t)\right]\times\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0) \tag{7}$$

式中

$$v=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$$

为介质中电磁波的传播速度。

$$\dot{I}(t)\equiv\frac{d}{dt}I(t)$$

从(7)式可以看出：电压波在平行平面金属板的传输过程，正如柱面电磁波在均匀介质中的传播过程一样。上式左边第二项类比于阻尼作用，右边类比于在 $P(x_0, y_0)$ 的一个线驱动源。如果略去面电阻率 ρ，则驱动源的强度和 $\dot{I}(t)$ 成正比例。

为了求解方程(7)，必须有初始条件和边界条件。因为是讨论放电的情形，故初始条件为

$$V\big|_{t=0}=V_0, \quad \frac{\partial V}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0 \tag{8}$$

式中 V_0 为初始充电电压。由于在板的边界上，电流密度 $\boldsymbol{j}$ 只能和边界线 S 的切线平行。根据(4)和(5)，我们得下列边界条件

$$\frac{\partial V}{\partial n}\bigg|_s=\left(-\mu d\frac{\partial j_n}{\partial t}-2\rho\,j_n\right)\bigg|_s=0 \tag{9}$$

本文的目的就是求解方程(7)并满足初始条件(8)和边界条件(9)。我们将要证明，由于边界条件(9)的作用，边界 S 对电压波起着全反射的作用。

以矩形板为例，对方程(7)求解，这时边界条件(9)具体化为

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0}&=\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=a}=0\\ \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{y=0}&=\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{y=b}=0\end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

将(7)式两边进行拉普拉斯变换，再利用傅里叶方法，我们得:

$$\bar{V}(P)=-\frac{d}{\varepsilon ab}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\bar{\xi}(P)\times\frac{\cos(n\pi x/a)\cos(m\pi y/b)\times\cos(n\pi x_0/a)\cos(m\pi y_0/b)}{P(P+2\rho/\mu d)+v^2[(n\pi/a)^2+(m\pi/b)^2]}+V_0/P \tag{10}$$

式中

$$\bar{V}(P)\equiv\int_0^{\infty}e^{-pt}V(x,y,t)\,dt \tag{11}$$

$$\bar{\xi}(P)\equiv\int_0^{\infty}e^{-pt}\left[\dot{I}(t)+\frac{2\rho}{\mu d}I(t)\right]dt \tag{12}$$

求得 $\bar{V}(P)$之后，再根据拉氏反演公式，我们就可以求出 $V(x, y, t)$。这样所得结果，是无数驻波的迭加。由于电压脉冲波传到激光通道时马上放电，时间非常短促。在这样短促的时间内，驻波解是没有多大意义的。为了从(10)得出具有物理意义的解，我们利用泊松求和公式进行变换。

根据泊松求和公式[1]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(n,m)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}g(k,j) \tag{13}$$

式中

$$g(k,j)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(s,t)\,e^{2\pi i(ks+jt)}ds\,dt \tag{14}$$

因此得:

$$\begin{aligned}\bar{V}(P)=-\frac{d\mu}{2\pi}\bar{\xi}(P)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}&\times\{K_0[R_{jk}^{(1)}\sqrt{P(P+2\rho/\mu d)}/v]\\&+K_0[R_{jk}^{(2)}\sqrt{P(P+2\rho/\mu d)}/v]\\&+K_0[R_{jk}^{(3)}\sqrt{P(P+2\rho/\mu d}/v]\\&+K_0[R_{jk}^{(4)}\sqrt{P(P+2\rho/\mu d)}/v]\}\\&+V_0/P\end{aligned} \tag{15}$$

式中 $K_0(z)$为第二类变型贝塞尔函数[2]，而

$$\left.\begin{aligned}R_{jk}^{(1)}&=[(x-x_0+2ka)^2+(y-y_0+2jb)^2]^{1/2}\\R_{jk}^{(2)}&=[(x-x_0+2ka)^2+(y+y_0+2jb)^2]^{1/2}\\R_{jk}^{(3)}&=[(x+x_0+2ka)^2+(y-y_0+2jb)^2]^{1/2}\\R_{jk}^{(4)}&=[(x+x_0+2ka)^2+(y+y_0+2jb)^2]^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

由(15)利用拉氏反演公式得:

$$\begin{aligned}V(x,y,t)=-\frac{d\mu}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{m=1,2,3,4}&\times\exp\left(-\frac{\rho}{\mu d}t\right)\int_0^t d\tau\exp\left(\frac{\rho\tau}{\mu d}\right)\\&\times\left[\dot{I}(\tau)+\frac{2\rho}{\mu d}I(\tau)\right]\\&\times\mathrm{ch}\left(\frac{\rho}{\mu d}\sqrt{(t-\tau)^2-(R_{jk}^{(m)})^2/v^2}\right)\\&\times U(t-\tau-R_{jk}^{(m)}/v)/\\&\sqrt{(t-\tau)^2-(R_{jk}^{(m)})^2/v^2}+V_0\end{aligned} \tag{17}$$

式中 $U(x)$称为单位函数，它的定义为

$$U(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ \frac{1}{2}, & x=0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{18}$$

我们可以看出：(17)中 $m=1$, $j=k=0$ 这一项表示从源点 $P(x_0, y_0)$直接传到场点(x, y)的负电压脉冲波。其他各项分别代表从各个边界经过一次或多次反射而来的负电压脉冲波。例如 $m=3$, $j=k=0$ 这一项乃是代表从边界 AB(图 1(a))反射以后传到场点的负电压脉冲波。$m=4$, $k=-1$, $j=0$ 这一项乃是代表从 AD 反射以后又经 CD 反射再传到场点的负电压脉冲波(当(x, y)到$(2a-x_0, -y_0)$的连线和 CD 相交)或从 CD 反射以后又经 AD 反射再传到场点的负电压脉冲波(当(x, y)到$(2a-x_0, -y_0)$的连线和 AD 相交)，其他各项由此类推。这里要特别指出：在反射前后电压脉冲幅度没有任何改变，这充分说明了各边对电压脉冲的反射是

一种全反射。从(17)还可以看出：若 $x_0\neq 0$, $y_0\neq 0$, 则由源点直接传到场点的负电压脉冲和从各边反射而来的负电压脉冲，时间先后不一，则整个电压脉冲便有被拉平的趋势。如果 $x_0=y_0=0$, 则由源点直接传到场点以及从 AB 反射或从 AD 反射，或者先从 AD 反射再由 AB 反射等等都能同时达到场点，负电压脉冲就会加强。所以对于矩形板传输线，火花隙引线接触点的位置最好放在一个角的顶点，能加大负电压脉冲，提高激光输出功率，我们的实验也证实了这一点。

矩形板传输线各边的反射波仍然是些柱面波，幅度随着传播过程而逐渐减小。如果改用抛物线传输板，把火花隙的位置放在抛物线的焦点上，则反射波为平面波，幅度不变，因此电压脉冲便大大加强，功效有较大的提高，再使激光通道和抛物线轴成一角度 θ 如(2)所示，使得激光通道内的放电激励和超辐射激光两相匹配。根据我们的实验结果，用抛物线板比用矩形板的激光输出功率有显著提高。

下面我们对(17)进行具体计算。

从(17)可以看出：要求出 $V(x, y, t)$ 必先知道 $I(t)$。$I(t)$ 的求法可以这样来做：在(10)中如果我们命 $x=x_0$, $y=y_0$, 则该式就表示在点 (x_0, y_0) 处电压象 $\overline{W}(P)$ 和电流象 $\overline{I}(P)$ 之间的一个关系。另一方面，放电是通过引线和火花隙来完成的，火花隙中的等离子体是一个纯电阻负载，它的阻值可以从实验上求出。根据传输线的理论，我们又可以求出 $\overline{W}(P)$ 和 $\overline{I}(P)$ 之间的另一个关系。从这两个关系就可以求出电流象 $\overline{I}(P)$。然后求出 $I(t)$ 再代入(17)就可以求出 $V(x, y, t)$。不过要注意，接触点不可能是一个真正的点，而是一个面，要从(10)求出 $\overline{W}(P)$ 和 $\overline{I}(P)$ 之间的关系，不能简单地命 $x=x_0$, $y=y_0$, 而是把(10)的 (x, y) 和 (x_0, y_0) 分别对接触面求平均。

因为火花隙中的等离子体的电阻是非常小的，为了使引线的特性阻抗和等离子体的阻抗相匹配，我们的引线是用薄铜片做的，铜片的宽度为 δ(我们取 $\delta=6$ 厘米)，则接触的地方是一条长度为 δ 的线段，设此线段一端为原点，另一端为 $(\delta, 0)$，则由(10)命 $y=y_0=0$, x 和 x_0 分别对线段平均，当 R_eP 甚大时，有

$$\overline{W}(P)\equiv\frac{1}{\delta^2}\int_0^\delta\int_0^\delta \overline{V}(P)\Big|_{\substack{y=0\\ y_0=0}} dx\,dx_0$$
$$\simeq -\frac{d}{\delta}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\operatorname{cth}\frac{bP}{v}\,\overline{I}(P)$$
$$+\frac{3d}{4\delta^2\varepsilon P}\,\overline{I}(P)\operatorname{cth}\frac{Pb}{v}\operatorname{sh}\frac{P\delta}{v}$$
$$\times\operatorname{sh}\frac{P(a-\delta)}{v}\Big/\operatorname{sh}\frac{Pa}{v} \tag{19}$$

另外，根据传输线的理论，我们又可求出

$$\overline{I}(P)=\frac{1}{Z_0}\left(\overline{W}(P)-\frac{V_0}{P}\right)$$
$$\times R\operatorname{sh}\frac{Pl}{c}+Z_0\operatorname{ch}\frac{Pl}{c}\Big)\Big/$$
$$\left(R\operatorname{ch}\frac{Pl}{c}+Z_0\operatorname{sh}\frac{Pl}{c}\right)$$
$$+\frac{V_0}{P}\Big/\left(R\operatorname{ch}\frac{Pl}{c}+Z_0\operatorname{sh}\frac{Pl}{c}\right) \tag{20}$$

式中 c 为空气中的光速，Z_0 为引线的特性阻抗，R 为等离子体的电阻，l 为引线的长度。为简便计，我们设引线的特性阻抗和等离子体是相匹配的，即 $Z_0=R$。另外，当 δ 比 a 小得很多时，则由(19)和(20)两式取近似，得

$$\overline{I}(P)\simeq\frac{V_0}{PZ_0}\exp\left(-\frac{Pl}{c}\right)\Big/$$
$$\left(1+H\operatorname{cth}\frac{Pb}{v}\right) \tag{21}$$

式中

$$H=d\sqrt{\mu}/4Z_0\delta\sqrt{\varepsilon} \tag{22}$$

通常 $H<1$。由(21)，我们得

$$I(t)\simeq\frac{V_0H}{Z_0(1-H^2)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\theta-in\pi}$$
$$\times\exp\left[\left(t-\frac{l}{c}\right)(in\pi-\theta)\frac{v}{b}\right]$$
$$\times U\left(t-\frac{l}{c}\right) \tag{23}$$

式中

$$\theta=\operatorname{arc\,th} H \tag{24}$$

由(23)对 t 求导数，得

$$\frac{\partial I}{\partial t}\approx\frac{V_0}{Z_0(1+H)}\delta\left(t-\frac{l}{c}\right)-\frac{2V_0H}{Z_0(1+H)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-H}{1+H}\right)^{n-1}\times\delta\left(t-\frac{l}{c}-\frac{2nb}{v}\right) \tag{25}$$

我们的兴趣在于激光通道这边上的电压脉冲，在(17)中我们命 $y=b$，及 $x_0=y_0=0$，并用上式代入(17)，略去面阻率 ρ，我们得：

$$V_0-V(x,\ b,\ t)\simeq\frac{4d\mu V_0}{\pi Z_0(1+H)}\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{U\left(t-\frac{l}{c}-R_{jk}/v\right)}{\sqrt{(t-l/c)^2-(R_{jk}/v)^2}}-\frac{8d\mu V_0H}{\pi Z_0(1+H)^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\times\left(\frac{1-H}{1+H}\right)^{n-1}\times\frac{U(t-l/c-2n\,b/v-R_{jk}/v)}{\sqrt{(t-l/c-2n\,b/v)^2-(R_{jk}/v)^2}} \tag{26}$$

式中

$$R_{jk}=\sqrt{(x+2k\,a)^2+(2j+1)^2b^2}$$

从(26)可以看出：最先传到场点的负电压脉冲乃是右边第一个双重级数中 $j=k=0$ 这一项，以后从各边反射或多次反射而来的负电压脉冲以及右边第二个三重无穷级数所代表的正电压脉冲才陆续传到。我们假定在相当短促时间之内，这些从各边多次反射而来的负电压脉冲和那些正电压脉冲基本上相消可以略去不计，于是得：

$$V_0-V(x,\ b,\ t)\simeq\frac{4d\mu V_0}{\pi Z_0(1+H)}\times\frac{U(t-l/c-R_{00}/v)}{\sqrt{(t-l/c)^2-(R_{00}/v)^2}} \tag{27}$$

式中 $R_{00}=\sqrt{x^2+b^2}$，

我们知道，当负电压脉冲传到激光通道时，并不立即放电，有一个弛豫时间 ΔT，据实验测定 ΔT 一般为 10^{-7} 秒左右。因此必须把(27)对这段时间取平均，故有

$$\overline{V_0-V(x,\ b,\ t)}=\frac{1}{\Delta T}\int_{\frac{l}{c}+\frac{R_{00}}{v}}^{\frac{l}{c}+\frac{R_{00}}{v}+\Delta T}\times(V_0-V(x,\ b,\ t))dt=\frac{4d\mu V_0}{\pi\Delta TZ_0(1+H)}\ln\left[1+V_0\Delta T/R_{00}+\sqrt{(1+v\Delta T/R_{00})^2-1}\right]\simeq\frac{4d\mu V_0}{\pi\Delta TZ_0(1+H)}\ln\left[2(1+V_0\Delta T/R_{00})\right] \tag{28}$$

我们知道储能电容器放电时，若电容器的长度为 b'(图1)，则在时间间隔 $(0,\ 2b'/v)$ 内的电流 I' 保持一定，它的大小为[3]

$$I'=\overline{V_0-V(x,\ b,\ t)}/(R'+d\sqrt{\mu}/a\sqrt{\varepsilon}) \tag{29}$$

式中 R' 为整个激光通道等离子体的横向电阻，是非常小的，可以略去，a 为激光通道之长。用(28)代入(29)，略去 R'，我们得激光通道内的放电电流 I' 为

$$I'\simeq\frac{4aV_0}{\pi Z_0(1+H)\Delta Tv}\ln\times\left[2(1+v\Delta T/R_{00})\right] \tag{30}$$

如果设 $Z_0=10$ 欧，$\varepsilon_r=2.8$，$\Delta T=10^{-7}$ 秒，$a=0.5$ 米，$R_{00}=0.5$ 米，$V_0=15000$ 伏，$d=2$ 毫米，$\delta=5$ 厘米；则由(30)得：

$$I'\sim190\text{ 安}$$

可见激励电流是很大的。

作者要特别感谢我系黄瑞如和易心洁两位老师，她们俩在本文的写作过程中，提了许多很重要的意见，并提供了一些宝贵的实验数据。

参 考 资 料

[1] Morse and Feshbach, *Method of Theoretical Physics*, Mc Graw-Hill, New York, 1953, 467.

[2] 王竹溪，郭敦仁，《特殊函数论》，科学出版社，1963, 413.

[3] 拉姆·惠勒，《近代无线电中的场与波》，人民邮电出版社，1958, 30.