理论分析

气动激光器的稳定振荡条件与输出功率

陈 嗣 熊

(中国科学院力学研究所)

提 要

本文直接由辐射场方程与边界条件导出了气动激光器的稳定振荡条件。由这一稳定振荡条件与资料[1]的饱和增益公式导出了气动激光器的输出功率表达式，指出了在一定的近似下用迭代法可由该公式求出气动激光器的输出功率值，并导出了气动激光器的最佳耦合计算公式，指出了 Rigrod 公式对气动激光器的不适用性，用本文的方法对 Gerry[2] 的典型实验进行了计算，计算结果与实验结果的一致证明了所提理论的可靠性。

一、引 言

对于非流动气体激光器的情形，输出功率可由 Rigrod[3] 理论来进行计算，这给设计提供了很大的方便。但对于气动激光器的情形，迄今尚无类似的可靠有效方法来计算输出功率。Cool[4] 的计算方法，由于采用了错误的稳定振荡条件[5]，因而他得到的输出功率公式(参看资料[4]的公式(33))是不能采用的；而 Lee[6] 的数值计算方法所采用的稳定振荡条件是未经证明的。本文直接由辐射场方程与边界条件导出了一般的稳定振荡条件，并由这一条件与资料[1]的饱和增益公式导出了气动激光器的输出功率表达式，指出了在一定的近似下用迭代法可由该表达式求出气动激光器的输出功率值，由功率表达式也可看出输出功率与气动激光器各参量间的关系。我们也导出了气动激光器的最佳耦合计算公式，指出了 Rigrod 公式对气动激光器是不适用的。本文的计算方法将对气动激光器的设计提供依据。我们对 Gerry 的典型实验进行了计算，理论与实验结果的一致证明了我们的理论的可靠性。

二、辐射场的基本方程与边界条件

假定介质沿 x 方向流动，二块平面反射镜 M_1、M_2 也沿 x 方向放置，光轴平行于 z 轴而垂直于流动方向，设镜子 M_1 与 M_2 间的距离为 L (设 M_1 镜在 $z=0$ 处，而 M_2 镜在 $z=L$ 处)，镜子 M_1、M_2 沿流动方向的长度为 s，沿 y 方向的高度为 H，镜子前缘正好位于喷管出口 $x=0$ 处。假定所有物理量与 y 无关，故问题可以作二维来处理。

由于饱和增益在一个波长范围内变化不大，而光腔中的折射率可近似看作常数 1，因此光腔中的辐射场方程可写成

$$\Delta^2 E+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon E=0 \qquad (1)$$

这里E是电矢量分量，ω为角频率，c为真空中的光速，$\varepsilon=1-i\frac{c}{\omega}g$，$g$为饱和增益。我们可把$g$近似看作仅为$x$的函数（它随$z$的变化不大）。

由于气动激光器光腔的非涅耳数一般较高，故我们可假定光腔进口（$x=0$处）与出口（$x=s$处）的边界条件为

$$E(0,z)=E(s,z)=0 \qquad (2)$$

方程(1)在边界条件(2)下求解，我们可假定解的形式为

$$E(x,z)=X(x)\cdot Z(z) \qquad (3)$$

将(3)代入(1)，并分离变量，可得

$$X''+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-K_z^2-i\frac{\omega}{c}g\right)X=0 \qquad (4)$$

$$Z(z)=C_1e^{iK_zz}+C_2e^{-iK_zz} \qquad (5)$$

这里K_z为分离常数，C_1、C_2为积分常数。

设二平面反射镜M_1、M_2的反射率分别为R_1、R_2，则由资料[5]的推导可知，镜面M_1与M_2上的边界条件分别为

$$K_z\frac{E(x,0)}{\frac{\partial E(x,0)}{\partial z}}=i\frac{1-\sqrt{R_1}}{1+\sqrt{R_1}}$$

$$\text{(在 } M_1 \text{ 镜面上)} \qquad (6)$$

$$K_z\frac{E(x,L)}{\frac{\partial E(x,L)}{\partial z}}=-i\frac{1-\sqrt{R_2}}{1+\sqrt{R_2}}$$

$$\text{(在 } M_2 \text{ 镜面上)} \qquad (7)$$

将(3)、(5)式代入(6)、(7)，并解出C_1与K_z，得

$$E(x,z)=C_2\left(-\sqrt{R_1}\,e^{iK_zz}+e^{-iK_zz}\right)\cdot X(x) \qquad (8)$$

其中

$$K_z=\frac{m\pi}{L}-i\frac{1}{4L}\ln\frac{1}{R_1R_2}$$

$$(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots) \qquad (9)$$

将K_z的表达式(9)代入(4)，并令

$$K_x^2=\frac{\omega^2}{c^2}-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2,$$

这里$|m|$表示纵模的阶数

$$\left(|m|\sim\frac{2L}{\lambda}\right),$$

是大整数，且

$$\left(\frac{m\pi}{L}\right)\Big/\left(\frac{\omega}{c}\right)\approx1,$$

而

$$\frac{1}{16L^2}\left(\ln\frac{1}{R_1R_2}\right)^2\approx0,$$

最后得辐射场的基本方程

$$X''+\left[K_x^2-i\frac{\omega}{c}\left(g-\frac{1}{2L}\ln\frac{1}{R_1R_2}\right)\right]X=0 \qquad (10)$$

由边界条件(2)，得

$$X(0)=0 \qquad (11)$$

$$X(s)=0 \qquad (12)$$

我们知道光腔中的辐射强度为

$$I(x,z)=\frac{c}{8\pi}E(x,z)\cdot E^*(x,z) \qquad (13)$$

这里“*”表示取共轭复数。设$\bar{I}(x)$表示$I(x,z)$沿z方向在0到L间的平均值，考虑到(10)中的$g(x)$一般归结为随$\bar{I}(x)$而变化的函数，故把(8)代入(13)，并沿z方向在0到L间取平均，在$X(x)$中适当引入常数因子，最后可得

$$\bar{I}(x)=X(x)\cdot X^*(x) \qquad (14)$$

其中$X(x)$满足(10)、(11)、(12)。

三、气动激光器的输出功率表达式

为确定起见，我们考虑CO_2-N_2-H_2O体系。我们采用A. E. Siegman等所采用的流动饱和增益公式（参看资料[1]的公式(23)、(24)、(25)，这里符号的意义同资料[1]，只是进口位置x_0已换成坐标原点O）

$$g(x)=\left[\frac{g_0(x)}{1+W(x)}\right]\cdot\exp\left[-\frac{X_{CO_2}\beta}{X_{N_2}V}\int_0^x\frac{W(x')}{1+W(x')}dx'\right]$$

这里 $g_0(x)=g_0\exp[-X_{CO_2}\alpha x/X_{N_2}V]$

$$W(x)=\sigma\bar{I}(x)/h\nu\beta$$

g_0是进口小信号增益，α、β分别是CO_2的(001)与(100)能级与基态的碰撞交换速率(CO_2的(001)能级主要通过(030)与基态交换)。正如资料[1]所指出的，此公式是在二个主要假定下推得的：(一)在整个光腔区，假定N_2的$V=1$能级与CO_2的(001)能级之间保持瞬时泵浦平衡。(二)假定光束强度$\bar{I}(x)$在下能级衰减的特征长度范围内，变化缓慢。虽然这些假定在实际上并不总满足，尤其在光束前缘(即接近光腔进口处)，那里$\bar{I}(x)$的变化可能就较大。但正如资料[1]指出的，即使在这些情形，此公式也提供了气动激光器增益饱和趋势的精确描述。因此，我们就用此公式来描述实际的饱和增益衰减情况。

令

$$\frac{X_{CO_2}}{X_{N_2}}\cdot\frac{\alpha}{V}=a,\quad \frac{X_{CO_2}}{X_{N_2}}\cdot\frac{\beta}{V}=B,$$

$$\frac{h\nu\beta}{\sigma}=A_0,$$

并设$X(x)$的模为$f(x)$，则由(14)，$\bar{I}(x)=f^2(x)$，因此，饱和增益公式成

$$g(x)=\frac{g_0e^{-ax}}{1+f^2/A_0}\cdot\exp\left[-B\int_0^x\frac{f^2/A_0}{1+f^2/A_0}dx'\right]\qquad(15)$$

设$X(x)$的幅角为$\varphi(x)$，即

$$X(x)=f(x)e^{i\varphi(x)}$$

(这里$f(x)$、$\varphi(x)$当然都是x的实函数)，把$X(x)$的表达式代入(10)，并令实部与虚部分别等于零，得

$$f''+(K_x^2-\varphi'^2)f=0$$

$$f\varphi''+2f'\varphi'-K\left(g-\frac{1}{2L}\ln\frac{1}{R_1R_2}\right)f=0\qquad(16)$$

这里$K=\frac{\omega}{c}$。边界条件(11)、(12)成

$$f(0)=0\qquad(17)$$

$$f(s)=0\qquad(18)$$

由(16)，按一阶线性常微分方程解$\varphi'(x)$，得

$$\varphi'(x)=\frac{1}{f^2}\left[c+\int_0^x K\left(g-\frac{1}{2L}\ln\frac{1}{R_1R_2}\right)f^2dx'\right]\qquad(19)$$

这里c为积分常数。由边界条件(17)，可以看出为了使$\varphi'(0)$有限，必须有$c=0$。同时，由边界条件(18)，为了使$\varphi'(s)$保持有限，必须有

$$\int_0^s gf^2dx-\frac{1}{2L}\ln\frac{1}{R_1R_2}\int_0^s f^2dx=0\qquad(20)$$

这就是我们在资料[5]中提出的流动激光器的一般稳定振荡条件。它反映了从光腔进口至光腔出口，由流动激活介质建立辐射场所需满足的条件。

将(15)代入(20)，则(20)的左边第一项成为

$$\int_0^s gf^2dx=\int_0^s\frac{g_0e^{-ax}f^2}{1+f^2/A_0}\cdot\exp\left[-B\int_0^x\frac{f^2/A_0}{1+f^2/A_0}dx'\right]dx$$

用分部积分，得

$$\int_0^s gf^2\,dx=-\frac{g_0A_0}{B}\cdot\left\{e^{-ax}\exp\left[-B\int_0^x\frac{f^2/A_0}{1+f^2/A_0}dx'\right]\Big|_0^s+a\int_0^s e^{-ax}\exp\left[-B\int_0^x\frac{f^2/A_0}{1+f^2/A_0}dx'\right]dx\right\}$$

由公式(15)与边界条件(18)，上式可化成

$$\int_0^s gf^2\,dx=-\frac{g_0A_0}{B}\cdot\left\{\frac{g(s)}{g_0}-1+\frac{a}{g_0}\int_0^s g(x)dx+\frac{a}{g_0A_0}\int_0^s gf^2\,dx\right\}$$

由此式解出$\int_0^s gf^2\,dx$，最后可得

$$\int_0^s gf^2\,dx=\frac{A_0}{a+B}[g_0-g(s)]-\frac{aA_0}{a+B}\int_0^s g(x)dx,$$

将它代入(20)中，并令

$$\bar{g}=\frac{1}{s}\int_0^s g(x)\,dx$$

为沿流动方向的平均饱和增益，则最后得

$$\int_0^s f^2\,dx=\frac{2LA_0}{(a+B)\ln\frac{1}{R_1R_2}}\cdot[g_0-g(s)-as\bar{g}]$$

设镜子 M_2 的透射率为 t，则从 M_2 镜的输出功率 P 为

$$P=tH\int_0^s f^2\,dx=\frac{2tHLA_0}{(a+B)\ln\frac{1}{R_1R_2}}\cdot[g_0-g(s)-as\bar{g}] \tag{21}$$

这就是较严格的气动激光器输出功率的表达式。

由公式(21)可以看出，方括弧中的第二项表示未用完而由光腔出口流走的增益值；方括弧中的第三项表示在光腔长度 s 的范围内增益的碰撞损失值。

由资料[5]可以知道，对于气动激光器的情形一般近似有

$$\bar{g}\approx\frac{1}{2L}\ln\frac{1}{R_1R_2}$$

将它代入(21)，得

$$P=\frac{2tHLA_0}{(a+B)\ln\frac{1}{R_1R_2}}\cdot\left[g_0-g(s)-\frac{as}{2L}\ln\frac{1}{R_1R_2}\right] \tag{22}$$

这就是我们要求的气动激光器的输出功率表达式。公式(22)在形式上有些类似于非流动情形的 Rigrod 公式[3]，只是在方括弧中多了第二项 $g(s)$，方括弧中第三项前多了因子 as。

四、气动激光器的输出功率计算与最佳耦合

对于气动激光器的设计，一般都要求 $g(s)\ll g_0$，故气动激光器的没有流走能量的最大输出功率 $P_{\max}$ 可由(22)式得

$$P_{\max}=\frac{2tHLA_0}{(a+B)\ln\frac{1}{R_1R_2}}\cdot\left[g_0-\frac{as}{2L}\ln\frac{1}{R_1R_2}\right] \tag{22$'$}$$

当然这样求得的功率值会比实际情形略高些，但可用它来估计气动激光器的输出功率。

由公式(22)，只要我们能求出光腔出口的增益值 $g(s)$，就可较精确地求出输出功率值。由公式(15)，$g(s)$ 值是与辐射强度的分布 $f^2(x)$ 有关的，故要确定 $g(s)$ 似乎比较困难。但由实际的物理问题，我们知道，对同一流动介质，如果通过光腔的输出功率相同，那么在光腔出口流走的增益值应较接近相等。这是因为对流动激活介质如果取出了相同的能量，剩余能量应该相等，如果宏观气动参数不变，则光腔出口增益应较接近相等，故 $g(s)$ 表达式中的 $f^2(x)$ 可近似用相等输出功率的均匀分布来代替。而实际的实验结果[11]也表明输出较接近均匀分布。由于对一般情形有

$$tH\int_0^s f^2(x)\,dx=P,$$

故对同样输出功率的均匀分布应为

$$f^2=\frac{P}{tHs}$$

把它代入 $g(s)$ 的表达式中，可得

$$g(s)=\frac{g_0\,e^{-as}}{1+P/tHsA_0}\cdot\exp\left(-\frac{BPs}{tHsA_0+P}\right) \tag{23}$$

故问题归结为由(22)式与(23)式联立求 P。我们可用迭代法来解(22)、(23)式。由(23)式可以看出 $g(s)$ 是随 P 的值单调变化的：若 P 的值单调增加，则 $g(s)$ 单调减小；若 P 的值单调减小，则 $g(s)$ 单调增加。若首先在(22)式中，令 $g(s)=0$，则可求得 $P_0=P_{\max}$；把 P_0 值代入(23)式的右边，可求得 $g_1(s)$，显然有 $g_1(s)>0$，将 $g_1(s)$ 代入(22)式右边，可求得 P_1 值，显然 $P_0>P_1$；把求得的 P_1 值再代入(23)式，可求得 $g_2(s)$，显然 $g_1(s)<g_2(s)$，将

$g_2(s)$代入(22)式，可求得P_2值，显然$P_0>P_1>P_2$；如此循环迭代，最后可得一组序列$P_0>P_1>P_2>\cdots P_n>\cdots$，显然，必须要求$g_0$大到使所有的$P_n>0$(否则没有功率输出)，因此，$P_n$收敛于一个确定的值$P$，这就是我们要求的气动激光器的输出功率值。由于对应的$g_n(s)$序列亦为单调，即$0<g_1(s)<g_2(s)<\cdots<g_n(s)<\cdots g_0$，故$g_n(s)$亦收敛于确定的值$g(s)$，这样就解决了气动激光器的功率计算问题。由于对气动激光器一般都要求$g(s)\ll g_0$，故实际上，$P_{\max}$与精确值的偏差并不甚大。序列P_n将很快收敛于稳定值P。

现由(22)与(23)式，求气动激光器的最佳耦合。设镜子M_1、M_2的镜面损失都为a_1，镜子M_2的输出耦合为t，则(22)式可写成

$$P=-\frac{2tHLA_0}{(a+B)\ln[(1-a_1)(1-a_1-t)]}\cdot\left\{g_0-g(s)+\frac{as}{2L}\cdot\ln[(1-a_1)(1-a_1-t)]\right\} \tag{24}$$

令 $G=\frac{2HLA_0}{a+B}$，$F=\frac{as}{2L}$，最佳耦合t_{op}应对应于

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_{t=t_{op}}=0,$$

故由(24)与(23)式，可得

$$-\frac{G}{\ln[(1-a_1)(1-a_1-t_{op})]}\cdot\{g_0-g(s)+F\ln[(1-a_1)(1-a_1-t_{op})]\}$$
$$-\frac{Ft_{op}}{(1-a_1-t_{op})\ln^2[(1-a_1)(1-a_1-t_{op})]}\cdot\{g_0-g(s)+F\ln[(1-a_1)(1-a_1-t_{op})]\}$$
$$+\frac{GFt_{op}}{(1-a_1-t_{op})\ln[(1-a_1)(1-a_1-t_{op})]}=0$$

由于对气动激光器，一般都有$g(s)\ll g_0$，故在上式第一、二项中可忽略$g(s)$，经整理后，得

$$g_0+\frac{as}{2L}\ln[(1-a_1)(1-a_1-t_{op})]=-\frac{g_0t_{op}}{(1-a_1-t_{op})\ln[(1-a_1)(1-a_1-t_{op})]} \tag{25}$$

这就是我们要求的最佳耦合公式，由它解t_{op}。

若g_0L不太大，则有$t_{op}\ll1$，而一般$a_1\ll1$，(25)可近似简化成

$$g_0-\frac{as}{2L}(a_1+t_{op})=\frac{g_0t_{op}}{a_1+t_{op}}$$

由此解出t_{op}，得

$$t_{op}=\sqrt{\frac{2g_0La_1}{as}}-a_1 \tag{26}$$

而在这种情形，由 Rigrod 理论求得的最佳耦合$t_{op}=\sqrt{2g_0La_1}-a_1$，对气动激光器一般都有$as<1$，故由(26)式可以看出，实际的最佳耦合较 Rigrod 理论算得的最佳耦合值要高，这也说明了 Rigrod 理论对气动激光器是不适用的。

在$P_{\max}$的公式(22)′中，将A_0、a、B的表达式代入，并由资料[7]知$\sigma\approx\frac{718}{NT}$（这里分子的值实际上随着温度$T$是稍微有些变化的。$N$是光腔中的粒子数密度，$T$是光腔的平动温度），可得

$$P_{\max}\approx\frac{2tHLh\nu\beta X_{N_2}VNT}{718X_{CO_2}\alpha+\beta)\ln\frac{1}{R_1R_2}}\cdot\left[g_0-\frac{X_{CO_2}as}{2X_{N_2}VL}\ln\frac{1}{R_1R_2}\right]$$

由于$\alpha\ll\beta$，即CO_2激光上能级的弛豫时间远大于下能级的弛豫时间，故上式又可简化成

$$P_{\max}\approx\frac{2tHLh\nu X_{N_2}Vp}{718X_{CO_2}k\ln\frac{1}{R_1R_2}}\cdot\left[g_0-\frac{X_{CO_2}as}{2X_{N_2}VL}\ln\frac{1}{R_1R_2}\right] \tag{27}$$

这里p是光腔压力，k是玻尔兹曼常数。由公式(27)可大致看到输出功率与各种参数之间的关系。

五、对 Gerry 实验的计算结果

我们用(22)与(23)式，对 Gerry[2] 的典型实验进行了计算，具体计算结果如下：

Gerry 的原始数据：

$X_{CO_2}=0.08$, $X_{N_2}=0.91$, $X_{H_2O}=0.01$,

燃烧室温度$=1300°K$,

燃烧室压力$=17$ 大气压

出口 M 数$=4$,

面积比$=14$,

镜面损失$=0.02$,

$t=0.02$, $H=3$ 厘米,

$s=20$ 厘米, $L=30$ 厘米,

对小信号增益 g_0，我们近似采用资料[8, 9]对 Gerry 的 55 千瓦装置所用的小信号增益值，即取 $g_0\approx 4\times10^{-3}$ 厘米$^{-1}$。

计算结果：

假定 γ 取 1.35(这里 γ 是比热比)，则得

$T=342°K$,

$p=0.0987$ 大气压,

$V=1.45\times10^5$ 厘米/秒,

$N=2.145\times10^{18}$ 厘米$^{-3}$,

$\sigma=0.913\times10^{-18}$ 厘米^2

由资料[10]的弛豫时间数据，得

$$\frac{1}{\alpha}=25.4\times10^{-6}\text{秒},$$

$$\frac{1}{\beta}=3.3\times10^{-6}\text{秒}$$

$a=0.024$ 厘米$^{-1}$,

$B=0.184$ 厘米$^{-1}$。

$A_0=6716$ 瓦/厘米^2,

$$\frac{1}{2L}\ln\frac{1}{R_1R_2}=1\times10^{-3}\text{厘米}^{-1},$$

首先由(22)′可求得 $P_{max}=6800$ 瓦，用上节所述的迭代法，经三次迭代后，功率与出口饱和增益就达到了稳定值 $P=6280$ 瓦，$g(s)=0.278\times10^{-3}$ 厘米$^{-1}$。故输出功率值 $P=6280$ 瓦。

用(25)式计算最佳耦合，可得 $t_{op}\approx0.09$ (用(26)式得 $t_{op}\approx0.096$)，而用 Rigrod 理论算得的最佳耦合≈0.06。这说明了 Rigrod 理论对气动激光器是不适用的。

参考资料

[1] A. E. Siegman and E. A. Sziklas, *Appl. Opt.*, **13**, 12 (1974)

[2] E. T. Gerry, AIAA Paper No. 71-23

[3] A. Maitland and M. H. Dunn, "Laser Physics" North-Holland Publishing Company 1969, 朱如曾等译,"激光物理"国防工业出版社

[4] T. A. Cool, *J. Appl. Physics*, **40**, 9 (1969)

[5] 陈嗣熊,"高速流动激光器的稳定振荡条件、模式结构与输出功率特性"

[6] G. Lee, *The Phys. of Fluids*, **17**, 3 (1974)

[7] A. L. Hoffman and G. C. Vlases, *IEEE J. Quantum Electron*, **QE-8**, 2 (1972)

[8] D. B. Rensch, *Appl. Opt.*, **13**, 11 (1974)

[9] E. V. Locke, R. Hella, L. Westra, and G. Zeiders, *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-8**, (1972) p. 389

[10] P. L. Taylor and S. Bitterman, *Rev. Mod. Phy*, **41**, 1 (1969)

[11] D. M. Kuehn and D. J. Monson, *Appl. Phys. Lett.*, **16**, 1 (1970)