圆的光学性质与圆柱形聚光器的设计

左 铨 如

（杨州师范学院数学系）

本文研究了整个圆周和局部圆弧的聚光规律，给出了设计圆柱形聚光器的简单公式。

一、圆周的聚光规律

为了简便起见，我们只研究单位圆的聚光规律。对于半径为 R 的圆，只须将单位圆中与距离有关的量 R 倍就成了。

选取单位圆的圆心作为坐标原点，建立直角坐标系 xoy（图 1），则单位圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=\cos\varphi, \\ y=\sin\varphi, \end{cases} \quad (|\varphi|\leqslant x)。$$

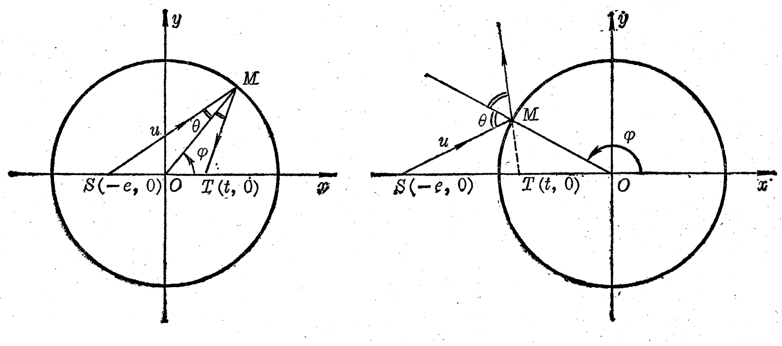

图 1

设 SM 为从点 $S(-e, 0)$ ($e\geqslant 0$，称 e 为偏心率) 射到圆周上一点 $M(\cos\varphi, \sin\varphi)$ 的光线，其反射线与 x 轴的交点为 $T(t, 0)$，则

$$\frac{|MT|}{|OT|}=\frac{|MS|}{|OS|},$$

即
$$\frac{\sqrt{(\cos\varphi-t)^2+\sin^2\varphi}}{|t|}=\frac{\sqrt{(\cos\varphi+e)^2+\sin^2\varphi}}{e},$$

化简得
$$t=\frac{e}{1+2e\cos\varphi}。\tag{1}$$

因此反射线 MT 的方程为

$$\frac{x-\cos\varphi}{t-\cos\varphi}=\frac{y-\sin\varphi}{0-\sin\varphi},$$

将(1)式代入化简得

$$f(x,y,\varphi)\equiv(\sin\varphi+e\sin2\varphi)x-(\cos\varphi+e\cos2\varphi)y-e\sin\varphi=0 \tag{2}$$

现在不难证明下述

定理 1. 从单位圆 $\begin{cases}x=\cos\varphi,\\y=\sin\varphi,\end{cases}$ $(|\varphi|\leqslant\pi)$ 内一点 $S(-e,0)$ $(0\leqslant e<1)$ 发出的光线，其反射光线都照射到以点 $F\left(\frac{e}{1-e^2},\ 0\right)$ 为圆心，$\frac{e^2}{1-e^2}$ 为半径的圆内（我们把这个圆称为焦圆）。

这是由于点 $F\left(\frac{e}{1-e^2},\ 0\right)$ 到任一反射线(2)的距离为

$$\frac{\left|(\sin\varphi+e\sin2\varphi)\frac{e}{1-e^2}-e\sin\varphi\right|}{\sqrt{(\sin\varphi+e\sin2\varphi)^2+(\cos\varphi+e\cos2\varphi)^2}}=\frac{e^2|\sin2\varphi+e\sin\varphi|}{(1-e^2)\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi}}$$

$$=\frac{e^2|\sin2\varphi+e\sin\varphi|}{(1-e^2)\sqrt{(\sin2\varphi+e\sin\varphi)^2+(\cos2\varphi+e\cos\varphi)^2}}\leqslant\frac{e^2}{1-e^2},$$

其中仅当 $\cos2\varphi+e\cos\varphi=0$ 即 $\cos\varphi=\dfrac{-e\pm\sqrt{8+e^2}}{4}$ 时等号才成立。

定理1所叙述的圆周的光学性质由图2可以得到直观的认识。同时我们还看到这个焦圆 F 内切于反射线族(2)的包络线。这包络线的方程可由(2)式解方程组：

$$\begin{cases}f(X,Y,\varphi)=0,\\f'_\varphi(X,Y,\varphi)=0,\end{cases}$$

求得

$$\begin{cases}X=\dfrac{e+3e^2\cos\varphi-2e^2\cos^3\varphi}{1+2e^2+3e\cos\varphi},\\[2mm]Y=\dfrac{2e^2\sin^3\varphi}{1+2e^2+3e\cos\varphi}。\end{cases}\quad(|\varphi|\leqslant\pi) \tag{3}$$

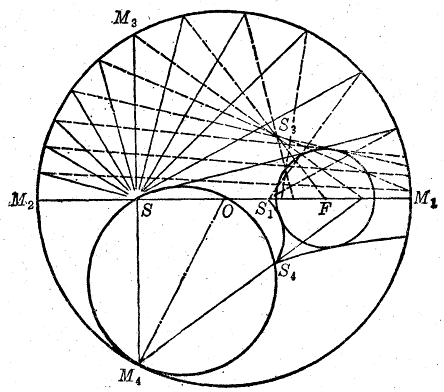

图 2

从点 $S(-e,0)$ 射到点 $M(\cos\varphi,\sin\varphi)$ 附近一段圆弧上的光线经反射后所成的象就位于点 $X((\varphi),Y(\varphi))$ 处。例如射到点 $M_{1,2}(\pm1,0)$ 附近的光线经圆弧反射后所成的象就位于点 $S_{1,2}\left(\frac{e}{1\pm2e},\ 0\right)$ 处 $\left(\text{当}\,e=\frac{1}{2}\,\text{时，点}\,S_2\,\text{在无穷远处，这时反射光线趋于平行}\right)$；射到点 $M_{3,4}(-e,\ \pm\sqrt{1-e^2})$ 附近的光线经圆弧反射后所成的象位于点 $S_{3,4}$ $(e(1-2e^2),\ \pm2e^2\sqrt{1-e^2})$ 处。因此包络线(3)是这些象点的集合，我们把它称为圆的象点曲线。所有的反射光线都照射到象点曲线所围成的区域内 $\left(\text{当}\,e\leqslant\frac{1}{3}\,\text{时}\right)$ 或者象点曲线与单位圆所围成的区域内 $\left(\text{当}\,\frac{1}{3}<e<1\,\text{时}\right)$。

顺便指出，刚刚列举的四点 S_1、S_2、S_3、S_4 是象点曲线的四个尖点，因为在这四点处，$\frac{dX}{d\varphi}$

$=\frac{6e^2}{K^2}\sin\varphi(\cos\varphi+e)(\cos\varphi+e\cos2\varphi)=0$, $\frac{dY}{d\varphi}=\frac{6e^2}{K^2}\sin\varphi(\cos\varphi+e)(\sin\varphi+e\sin2\varphi)=0$(其中 $K=1+2e^2+3e\cos\varphi$)。这四个尖点是象中特别明亮的地方。

二、圆柱形聚光器的设计

设计圆柱形聚光器，如果已知棒状工作物质的直径为 d，泵浦灯安装在距离圆柱形聚光器的轴心 O 为 eR(R 为圆柱的内半径)的地方(图 3)，则为了保证聚光，根据定理 1，应有

$$2\frac{e^2}{1-e^2}R\leqslant d。$$

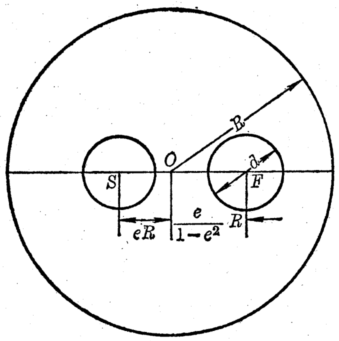

图 3

又由于在安装泵浦灯和棒状工作物质时，它们之间的距离有一个限度，设最小为 $2c$，则

$$eR+\frac{e}{1-e^2}R\geqslant 2c。$$

因此

$$\frac{2c(1-e^2)}{e(2-e^2)}\leqslant R\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^2}-1\right)d, \tag{4}$$

$$0< e\leqslant\sqrt{\left(\frac{2c}{d}\right)^2+2}-\frac{2c}{d}。 \tag{5}$$

例如，已知 $d=6$, $2c=24$，则代入(5)式求得 $e\leqslant0.243$，若取 $e=0.24$，则代入(4)式求得 $48.5\leqslant R\leqslant49$。

考虑安装的方便，人们习惯上将棒状工作物质和氙灯安装在与轴心等距离的地方。这时为保证圆柱形激光腔体聚光，可以运用下面的定理。

定理 2. 从单位圆内一点 $S(-e,0)(0<e<1)$ 发出的光线，其反射光线都照射到以点 $\bar{S}(e,0)$ 为圆心，r_0 为半径的圆内；

这里当 $0<e\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$r_0<\frac{\sqrt{2}e^2}{\sqrt{2}-e}\leqslant2e^2$,

当 $\frac{\sqrt{2}}{2}<e<1$ 时，$r_0<2e^2<\frac{\sqrt{2}e^2}{\sqrt{2}-e}$。

因此，当所设计的圆柱形聚光器之内径 D 满足条件：

$$\frac{\sqrt{2}e^2}{\sqrt{2}-e}D\leqslant d$$

时，就能保证聚光。

又因
$$eD=2c,$$
代入上式求得

$$D\geqslant\frac{4c^2}{d}+\sqrt{2}c。 \tag{6}$$

若将前例的 $d=6$, $2c=24$ 代入(6)式，则求得 $D\geqslant112.97$；又如 $d=10$, $D=45$，则 $2c\leqslant18$。

现在我们来证明定理 2。

由于点 $\bar{S}(e,0)$ 到任一反射线(2)的距离：

$$r(\varphi)=\frac{|e^2\sin 2\varphi|}{\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi}}\leqslant\frac{|e^2\sin 2\varphi_0|}{\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi_0}}=r_0。$$

其中 φ_0 是使距离 $r(\varphi)$ $(|\varphi|\leqslant\pi)$ 取得最大值 r_0 时 φ 所取的值。φ_0 适合下面的方程:

$$\frac{4\sin 2\varphi\cos 2\varphi(1+e^2+2e\cos\varphi)+2e\sin\varphi\sin^2 2\varphi}{(1+e^2+2e\cos\varphi)^2}=0,$$

即
$$3e\cos^3\varphi+2(1+e^2)\cos^2\varphi-e\cos\varphi-(1+e^2)=0。$$

可以证明,该方程的根 φ_0 满足不等式

$$\cos\varphi_0>-\frac{e+\sqrt{8+e^2}}{4},$$

特别当
$$0<e\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ 时}, \cos\varphi_0>-\left(\frac{e}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)。$$

因此,当 $0<e\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,

$$r_0=\frac{e^2|\sin 2\varphi_0|}{\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi_0}}<\frac{e^2|\sin 2\varphi_0|}{\sqrt{1+e^2-2e\left(\frac{e}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}$$

$$\leqslant\frac{e^2}{\sqrt{\left(1-\frac{e}{\sqrt{2}}\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}\,e^2}{\sqrt{2}-e}。$$

当 $\frac{\sqrt{2}}{2}<e<1$ 时,

$$r_0=\frac{2e^2|\sin\varphi_0\cos\varphi_0|}{\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi_0}}\leqslant\frac{2e^2|\sin\varphi_0|}{\sqrt{\sin^2\varphi_0+(e+\cos\varphi_0)^2}}\leqslant 2e^2<\frac{\sqrt{2}\,e^2}{\sqrt{2}-e}。\text{定理 2 获证。}$$

根据定理 2 设计的圆柱形聚光器,一般要比根据定理 1 设计的大些。如果要求激光器的结构紧凑体积小,希望聚光器比由(6)式或(4)、(5)式计算出来的还要小,我们可以采用横截面如图 4 所示的两段圆弧(粗线所示)形聚光器。由于计算上遇到困难,我们改用画图的办法来判断是否满足聚光要求。具体画法如下(参见图 2):

(i) 作单位圆 O,在圆 O 内取一点 S,使 $OS=e=\sin\theta$ $\left(e\text{ 为预先适当选定的,例如取 } e=\frac{1}{2}\right)$,作 $SM_3\perp OS$ 交圆周于 M_3。以 OM_3 为直径作圆交 $\odot O(e)$ 于点 S_3;

(ii) 作出焦圆 F $\left(\text{圆心为}\left(\frac{e}{1-e^2}, 0\right), \text{半径为}\frac{e^2}{1-e^2}\right)$,并作它的一条切线 S_3D (用来近似代替一段象点曲线);

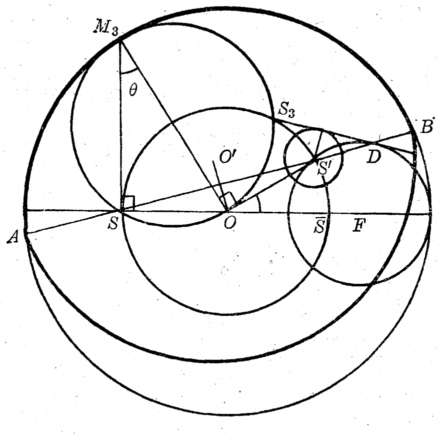

图 4

(iii) 设 SF 交 $\odot O(e)$ 于点 $\overline{S}$,取 $\widehat{\overline{S}S_3}$ 的中点 S' $(OS'\perp OM_3)$,量出点 S' 到 S_3D 的距离 $\varepsilon(e)$ $\left(\text{例如 }\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)\approx 0.13\right)$。则当 $2R\varepsilon(e)\leqslant d$ (R 为所设计的聚光器的圆弧半径),且 $eR\cos\frac{\theta}{2}$

$\geqslant c$ 时符合要求。

如果还不合要求，可适当减小 e，重新画图作判断。当然根据上述画法而造一张 $\varepsilon=\varepsilon(e)$ 的函数图表，根据它设计就更加简便。在上述画法中，点 S' 是取的 $\widehat{SS_3}$ 的中点。也可以将点 S' 取得较接近于点 S_3，这样聚光的要求容易达到，但会使得照到点 A 附近的光线有更多的部分反射不到位于点 S' 处的棒状工作物质上而损失掉，从而影响聚光效率，这是需要注意的。

三、圆弧的成象规律

在第一部分，我们已经指出，位于 $S(-e,\ 0)$ 的点光源经圆周上点 $M(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ 附近的一小段圆弧（实际上是圆弧绕半径 OM 旋转所成的球面镜，M 为镜的顶点）反射后所成的象就位于点 $S'(X,\ Y)$ 处（这里的 X、Y 由(3)式所确定）。为了应用的方便起见，下面我们来找出物距 $u\left(u=|SM|=\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi}\right)$、象距 $v\left(|v|=|MS'|=\sqrt{(X-\cos\varphi)^2+(Y-\sin\varphi)^2}\right)$ 以及焦距 $f\left(凹镜\ f=\frac{1}{2},\ 凸镜\ f=-\frac{1}{2}\right)$ 之间的关系。由于直接根据(3)式来推导太繁，所以我们改用它的另一形式。

设射到镜的顶点 M 处的光线之入射角为 $\theta\left(|\theta|<\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$u\sin\theta=e\sin\varphi,\quad u\cos\theta=\pm(1+e\cos\varphi),$$

（参见图 1，凹镜取正号，凸镜取负号）。

故
$$\sin\varphi+e\sin 2\varphi=e\sin\varphi\cos\varphi+(1+e\cos\varphi)\sin\varphi=u\sin(\theta\pm\varphi),$$
$$\cos\varphi+e\cos 2\varphi=(1+e\cos\varphi)\cos\varphi-e\sin\varphi\cos\varphi=\pm u\cos(\theta\pm\varphi),$$

从而反射线方程(2)可以改记为

$$x\sin(\theta\pm\varphi)\mp y\cos(\theta\pm\varphi)-\sin\theta=0 \tag{2'}$$

其中 θ 是 φ 的函数，由 $\sin\theta=\frac{e\sin\varphi}{u}$，$\cos\theta=\frac{\pm(1+e\cos\varphi)}{u}\left(u=\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi}\right)$ 决定。

因此反射线族(2′)的包络线可由方程组

$$\begin{cases}X\sin(\theta\pm\varphi)\mp Y\cos(\theta\pm\varphi)-\sin\theta=0,\\(\theta'\pm1)X\cos(\theta\pm\varphi)\pm(\theta'\pm1)\,Y\sin(\theta\pm\varphi)-\theta'\cos\theta=0,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}X=\cos\varphi\mp\dfrac{\cos\theta\cos(\theta\pm\varphi)}{\theta'\pm1},\\[2mm] Y=\sin\varphi-\dfrac{\cos\theta\sin(\theta\pm\varphi)}{\theta'\pm1}。\end{cases} \tag{3'}$$

由 $\sin\theta=\frac{e\sin\varphi}{u}\left(u=\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi}\right)$ 对 φ 求导得

$$\theta'\cos\theta=\frac{ue\cos\varphi+(e\sin\varphi)^2u^{-1}}{u^2}=\frac{ue\cos\varphi+u\sin^2\theta}{u^2}$$
$$=\frac{1+e\cos\varphi-\cos^2\theta}{u}=\pm\cos\theta-\frac{\cos^2\theta}{u}。$$

故
$$\theta'\pm1=\pm2-\frac{\cos\theta}{u}。$$

因此
$$|v|=\sqrt{(X-\cos\varphi)^2+(Y-\sin\varphi)^2}=\left|\frac{\cos\theta}{\theta'\pm1}\right|,$$
$$\left|\frac{1}{v}\right|=\left|\frac{\theta'\pm1}{\cos\theta}\right|=\left|\frac{1}{\pm\frac{1}{2}\cos\theta}-\frac{1}{u}\right|,$$
得
$$\frac{1}{v}=\frac{1}{\pm\frac{1}{2}\cos\theta}-\frac{1}{u},$$
即
$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f\cos\theta}。$$

这样我们就得到了一般的球面镜成象公式:
$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f\cos\theta}。$$
式中 u 为物距($u>0$), v 为象距($v>0$ 为实象, $v<0$ 为虚象), f 为焦距$\left(凹镜 f=\frac{R}{2}, 凸镜 f=-\frac{R}{2}, R 为球面半径\right)$, θ 为光线的入射角。

如果以球面镜的顶点 M 为极点, 主光轴为极轴建立如图5所示的极坐标系, 则根据球面镜成象公式知道, 位于圆 $\rho=u_0\cos\theta$ 上的发光点 S, 它的象 S' 位于圆 $\rho=v_0\cos\theta$ 上(谓之保圆性), 这里 u_0、v_0 满足关系式 $\frac{1}{u_0}+\frac{1}{v_0}=\frac{1}{f}$。特别当 $v_0=u_0=2f=R$ 时, 发光点 S、象点 S' 位于以凹镜的半径 CM 为直径的一个圆上, 这个圆特称为罗兰圆(就是图3中以 OM_4 为直径的圆)。

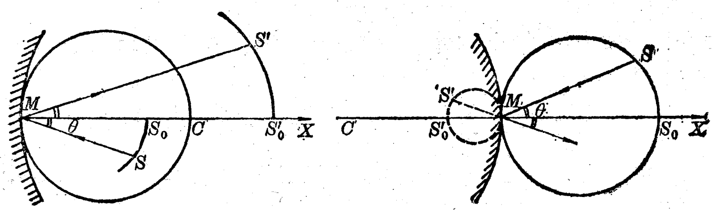

图 5

致读者

英明领袖华主席对科学工作做了重要指示,发出了阶级斗争、生产斗争和科学实验三大革命运动一起抓的号召, 极大地鼓舞了科技战线的广大科技人员为革命搞科研的积极性。一场向科学技术现代化进军的伟大革命群众运动, 正在迅猛兴起。为了适应大好形势的发展,本刊从1978年起页数增加至64页。

编 辑 部