激光干涉测长中常用的迭代法及其误差分析

哈尔滨量具刃具厂 单圭庆

提　　要

在激光干涉测长技术中，迭代法是一种普遍采用的数据处理方法。本文叙述了迭代法的原理，并以三级迭代法为例，对它的理论计数误差进行了分析。文中还介绍了一种三级迭代法，它具有运算线路简单，计数精度较高的优点。

在一般激光干涉测长仪中，测量靶的位移量 L 是按如下关系式求得的：

$$L=m\frac{\lambda}{2} \tag{1}$$

式中：m 为光电接收器上光强明暗交替变化的次数；λ 为在测量条件下激光的波长。

为了提高测量精度，通常还要对干涉条纹进行细分，其中最普遍采用的是四细分。这时从干涉条纹得到的脉冲数目 $N=4m$，于是(1)式就成为如下形式：

$$L=N\frac{\lambda}{8} \tag{2}$$

(2)式还可以写成如下形式：

$$L=N\frac{\lambda_{真}}{8(n_{标}+\Delta n)} \tag{3}$$

式中：$\lambda_{真}$ 为激光在真空中的波长；$n_{标}$ 为空气在标准状态(温度 $T=20$℃，气压 $P=760$ 毛，湿度 $f=10$ 毛)下的折射率；Δn 为测量条件下与标准状态下空气折射率之差。

任何长度测量必然要与工件发生联系，因此还应把工件的热膨胀系数考虑到测量结果中去。工件在温度 20℃ 时的长度 L_0 为：

$$L_0=\frac{L}{1+\alpha\cdot10^{-6}\Delta T_1} \tag{4}$$

式中：$\alpha\cdot10^{-6}/$℃ 为工件材料的线胀系数；$\Delta T_1=(T_1-20)$℃，T_1 为工件温度。

将(3)式代入(4)式，得到：

$$L_0=N\frac{\lambda_{真}}{8(n_{标}+\Delta n)(1+\alpha\cdot10^{-6}\Delta T_1)} \tag{5}$$

将高阶微量略去后，(5)式可简化为下式：

$$L_0 \approx N\frac{\lambda_{标}}{8}\left(1-\frac{\Delta n}{n_{标}}-\alpha\cdot 10^{-6}\Delta T_1\right) \tag{6}$$

式中：$\lambda_{标}$ 为激光在标准状态下的波长。

如果测量条件下的空气折射率以如下经验公式求得：

$$\frac{\Delta n}{n_{标}} \approx -(0.930\Delta T_2 - 0.358\Delta P)\cdot 10^{-6} \tag{7}$$

式中：$\Delta T_2=(T_2-20)$℃；$\Delta P=(P-760)$毛。T_2 为激光束经过的空气温度。当工件温度和空气温度完全平衡时，$\Delta T_1=\Delta T_2=\Delta T$。(6)式可改写成如下形式：

$$L_0 \approx N\frac{\lambda_{标}}{8}\{1-[(\alpha-0.930)\Delta T-0.358\Delta P]\cdot 10^{-6}\} \tag{8}$$

令：

$$\lambda_{当}=\lambda_{标}\{1-[(\alpha-0.930)\Delta T-0.358\Delta P]\cdot 10^{-6}\} \tag{9}$$

称 $\lambda_{当}$ 为当量波长，则(8)式可写作：

$$L_0 \approx N\frac{\lambda_{当}}{8} \tag{10}$$

利用乘法器，将计数器记下的脉冲数 N 乘以脉冲当量 $\frac{\lambda_{当}}{8}$，就可以得到工件在标准状态下的长度 L_0。

在工程测量中，精度要求不十分高。为了简化计算装置，常常采用一种近似的计算方法——迭代法。这种方法的原理如下：

每一个脉冲代表 $\frac{\lambda_{当}}{8}$，而 $\frac{\lambda_{当}}{8}=0.079\cdots\cdots$微米，以这个数为单位，计数是非常麻烦的。如果以 0.1 微米代表一个脉冲，计数就很方便了，但是它带来了误差。一个脉冲带来的误差为 $0.1-0.079=0.021$ 微米；二个脉冲的误差为 $0.2-2\times0.079=0.042$ 微米。随着脉冲数的增加，误差也随着增大。为此，按一定的规律减去和加上一些脉冲，使误差控制在允许的范围内，这就是所谓迭代法。

设 M 为计数脉冲数，亦即以 0.1 微米为单位的计数数目，则计数误差 ΔL_0 可用下式表示：

$$\Delta L_0 = 0.1M - N\frac{\lambda_{当}}{8}$$

若要求 $|\Delta L_0|\leqslant 0.1$(微米)，根据上式，$M$ 应满足如下关系式：

$$N\frac{\lambda_{当}/8}{0.1}-1 \leqslant M \leqslant N\frac{\lambda_{当}/8}{0.1}+1 \tag{11}$$

$\frac{\lambda_{当}/8}{0.1}$ 是一个近似等于 1 的小数，把它展开成如下级数形式：

$$\frac{\lambda_{当}/8}{0.1}=1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k} \tag{12}$$

式中 a_1, a_2, $\cdots$, a_k 为正整数或负整数。

根据(12)式，各级系数 a_k 可按下式求得：

$$a_k=\frac{0.1}{\frac{\lambda_{当}}{8}-0.1\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{a_{i-1}}} \tag{13}$$

式中：令 $\frac{1}{a_0}=1$。

将(12)式代入(11)式后得到：

$$N\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)-1\leqslant M\leqslant N\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+1 \tag{14}$$

当计数脉冲数 M 满足上式的要求时，就能保证计数误差 $|\Delta L_0|\leqslant 0.1$(微米)。

迭代法的计数脉冲数 M 是按如下规律得到的：每过 $N=a_1$ 个脉冲加上(或减去) 1 个；每过 $N=a_2$ 个脉冲加上(或减去) 1 个；依此等等；直至每过 $N=a_k$ 个脉冲加上(或减去) 1 个。a_1, a_2, …, a_k 称为各级迭代系数。按这样的规律来加减脉冲所得到的计数脉冲数 M，基本上可以满足(14)式的要求，但是有一些测量点仍然得不到满足，因此计数误差要超过 0.1 微米。

工程测量中用得较多的是三级迭代法，其中第三级迭代系数是可变的，以适应测量条件的变化。下面分析此种迭代法的理论计数误差，对于其它各种形式的迭代法来说，其分析方法也是同样适用的。

设：$\Delta T=\pm 12°C$；$\Delta P=\pm 30$ 毛；$\alpha=0\sim 24$；$\frac{\lambda_{标}}{8}=0.079102478$ 微米。则据根(9)式可算得：

$$\left(\frac{\lambda_{当}}{8}\right)_{最大}=0.079125225(微米)$$

$$\left(\frac{\lambda_{当}}{8}\right)_{最小}=0.079079731(微米)$$

再按(13)式求得 a_1, a_2 和 a_3 如表 1：

表 1

a_1	a_2	$a_{3最大}$	$a_{3最小}$
−4	+24	−2413.0284	−1150.2754
	+25	+1254.2173	+ 798.5626
−5	−111	+3827.6046	−5163.1557
	−112	+5530.0558	−3648.1704

从简化计算电路的要求出发，选取 $a_1=-4$, $a_2=+24$, ……这一组是适合的。这样，(11)式可表示为如下形式：

$$N\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}-\frac{1}{a_3}\right)-1\leqslant M\leqslant N\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}-\frac{1}{a_3}\right)+1 \tag{15}$$

如前所述，迭代法的计数脉冲数 M 是按如下规律求得的：每过 4 个脉冲减去 1 个；每过 24 个脉冲加上 1 个；每过 a_3 个脉冲减去 1 个。按这样的规律来加减脉冲数，(15)式不能完全得到满足，因此不能保证所有测量点的计数误差均小于 0.1 微米。

在图 1 中，锯齿形折线 $L_0=0.1M$ 对直线 $L_0=N\frac{\lambda_{当}}{8}=N\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}-\frac{1}{a_3}\right)$的偏差就是计数误差 ΔL_0。

从图 1 中可以看出，在脉冲数 N 从 0 到 a_3 的范围内，产生最大误差的测量点其相应的脉冲数 N' 应为：

$$N'=24k+3 \tag{16}$$

式中：$k=\frac{a_3}{24}$(取整数部分)。

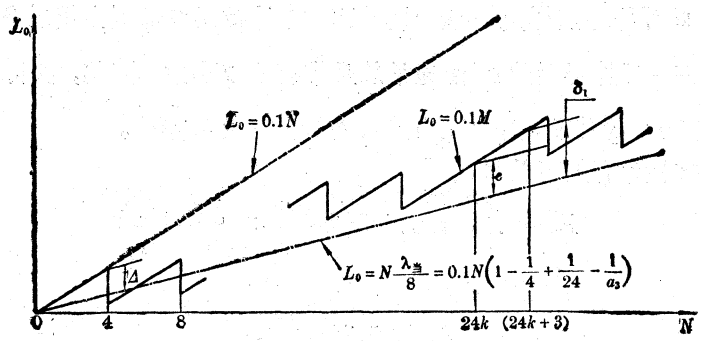


图 1

该点的误差为：

$$\delta_1=0.1M-N'\frac{\lambda_{当}}{8}$$

$$=0.1\left[(N'-3)\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}\right)+3\right]-N'\frac{\lambda_{当}}{8}$$

$$=N'\left(0.0791\dot{6}-\frac{\lambda_{当}}{8}\right)+0.0625(\text{微米}) \tag{17}$$

表 2 列出了在标准状态下以及在前面规定的极限工作状态下计算得到的 N' 和 δ_1 的数值。可见在不同的工作状态下，δ_1 的变化是很小的。

表 2

$\frac{\lambda_{当}}{8}$(微米)	a_3	k		N'	δ_1 (微米)
		计算值	选取值		
0.079079731 (下极限工作状态)	1150.2754	47.9	47	1131	0.1608
0.079102478 (标准状态)	1557.9066	64.9	64	1539	0.1613
0.079125225 (上极限工作状态)	2413.0284	100.5	100	2403	0.1621

在脉冲数从 0 到 a_3 的范围内，最大误差 δ_1 也可以从图 1 中的几何关系得到：

$$\delta_1=e+\frac{3}{4}\Delta \tag{18}$$

据图示：

$$\Delta=4\left(0.1-\frac{\lambda_{当}}{8}\right)\approx 0.084(\text{微米})$$

而 $e\approx 0.1$ 微米，考虑极限情况，取 $e=0.1$ 微米，则 (18) 式成为：

$$\delta_1\approx 0.1+\frac{3}{4}\times 0.084=0.163\approx 0.16(\text{微米})$$

因此，可以得出这样的结论：在脉冲数 $N=0\sim a_3$ 的范围内，在 N 近似等于 a_3 且小于 a_3 时，产生最大计数误差。误差是常数，为 0.16 微米。

如果实际选取的 a_3 值等于计算得到的 a_3 值，那么，在 $N=a_3$ 时，计数误差就等于 0。随着 N 的增大，在 N 近似等于 $2a_3$，且小于 $2a_3$ 时，又产生 0.16 微米的最大误差，到 $N=2a_3$ 时，

误差又等于0。依此等等。这样，在任意测量长度内，计数误差都不会超过0.16微米。

事实上，根据$\frac{\lambda_{当}}{8}$计算得到的a_3值通常总是带有多位小数，因此，实际选取的a_3值与计算得到的a_3值会有δa_3的偏差。下面讨论δa_3对计数精度的影响。

根据迭代法的要求，有如下关系式：

$$L_0=0.1M\approx 0.1N\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}-\frac{1}{a_3}\right) \tag{19}$$

微分上式，得到：

$$\delta L_0\approx 0.1N\frac{\delta a_3}{a_3^2} \tag{20}$$

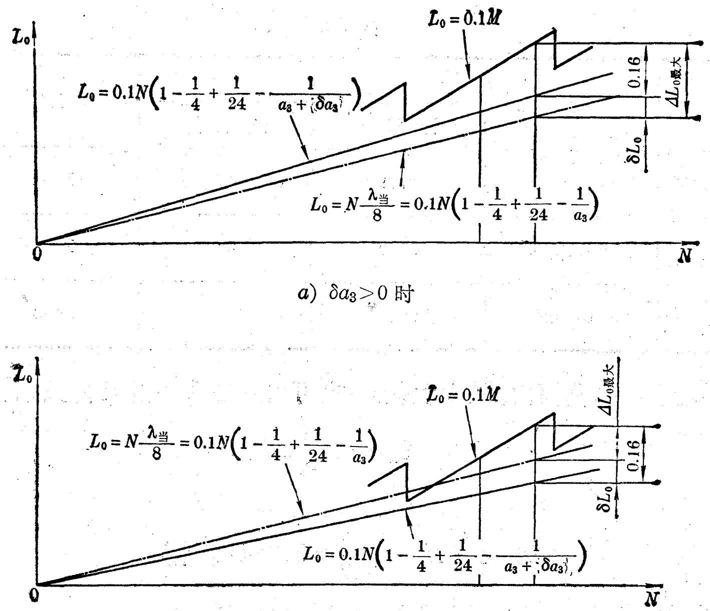
再将(19)式代入(20)式，经化简后得到：

$$\delta L_0\approx\frac{24}{19}\frac{L_0}{a_3^2}\delta a_3 \tag{21}$$

综上所述，计数误差$\Delta L_{0最大}$有两项误差构成：一项是常数误差，为0.16微米；另一项是线性误差，是δa_3产生的。误差值如(21)式所示。

$$\Delta L_{0最大}\approx 0.16(微米)+\frac{24}{19}\frac{L_0}{a_3^2}\delta a_3 \tag{22}$$

这两项误差之间的相互关系，从图2中可以明显看出。当$\delta a_3>0$时，两项误差相加；当$\delta a_3<0$时，两项误差相减。



a) $\delta a_3>0$时

b) $\delta a_3<0$时

图 2

如果第三级迭代系数a_3取整数，则必须按四舍五入的原则选取a_3的计算值，这就带来了$\delta a_3=\pm 0.5$的凑整误差。在这种情况下，按(22)式求得最大计数误差为：

$$\Delta L_{0最大}\approx 0.16\pm\frac{12}{19}\frac{L_0}{a_3^2}$$

在标准状态下，$a_3=1557.9066$，这时 $\Delta L_{0最大}$ 为：

$$\Delta L_{0最大}\approx 0.16\pm 2.6\times 10^{-7}L_0$$

在 $L_0=1$ 米时，得：

$$\Delta L_{0最大}\approx 0.16\pm 0.26\text{（微米）}$$

迭代法本身带来如此明显的误差，对激光干涉测长仪来说是不合理的。

采用四级迭代法，可以提高迭代法的精度，但是它使运算电路明显地复杂化。下面讨论一种经过改进的三级迭代法。它具有精度与四级迭代法相当，但运算电路大为简化的优点。它是通过使选取的 a_3 值精确到一位小数的办法来实现的。这样，凑整误差减小一个数量级，为 ± 0.05。在标准状态下，在 $L_0=1$ 米时，可算得 $\Delta L_{0最大}\approx 0.16\pm 0.026$（微米）。凑整误差对计数精度的影响就很小了。

a_3 值精确到一位小数是按如下方法实现的。举例来说，例如 $a_3=1557.9$，它是由如下近似电路来完成。其运算规律是：每 10 次中，有 1 次是过 1557 个脉冲减去 1 个脉冲；有 9 次是每过 1558 个脉冲减去 1 个脉冲。

将上述运算规则用一般式来表示，可表述如下：

设：
$$\frac{1}{a_3}=\frac{1}{k_0+\dfrac{k_1}{10}}$$

式中 k_0 和 k_1 均为正整数，但 k_1 限定为 1～9 的正整数。

实际电路完成的运算是：

$$\frac{1}{a_3'}=\frac{1}{10}\left(\frac{10-k_1}{k_0}+\frac{k_1}{k_0+1}\right)$$

令 $\Delta a_3=a_3'-a_3$，将以上两式联立求解并化简后，可得到：

$$\Delta a_3\approx -\frac{k_1(10-k_1)}{100k_0} \tag{23}$$

函数 Δa_3 关于 k_1 的导函数为：

$$(\Delta a_3)'\approx\frac{2k_1-10}{100k_0}$$

令 $(\Delta a_3)'=0$，算得 $k_1=5$。代入(23)式，得到 Δa_3 的最大值为：

$$\Delta a_{3最大}\approx -\frac{0.25}{k_0} \tag{24}$$

式中 k_0 是一个大于 1000 的整数。考虑最坏情况，在前面规定的下极限工作状态下，k_0 具有最小值，它等于 1150。以 $k_0=1150$ 代入(24)式后，可得：

$$\Delta a_{3最大}\approx -\frac{0.25}{1150}\approx -0.0002$$

可见，实际运算电路的精度完全能满足使 a_3 值精确到一位小数的要求。

从简化电路的要求出发，(19)式所表示的三级迭代法如果改换成如下形式，则更为有利。

$$L_0=0.1M\approx 0.1N\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}\right)\left(1-\frac{1}{b_3}\right) \tag{25}$$

式中：$b_3=\dfrac{19}{24}a_3$。

这种形式的三级迭代法的最大计数误差表示式为：

$$\Delta L_{0\text{最大}}\approx 0.16(\text{微米})+\frac{L_0}{b_3^2}\delta b_3 \tag{26}$$

采用与处理 a_3 相同的计算电路来处理 b_3，使 b_3 精确到一位小数，则凑整误差 $\delta b_3=\pm 0.05$。在标准状态下，$b_3=\frac{19}{24}\times 1557.9066=1233.3427$。代入(25)式，得到：

$$\Delta L_{0\text{最大}}\approx 0.16(\text{微米})\pm 3.3\times 10^{-8}L_0 \tag{27}$$

表 3 列出了式(27)的部分计算结果。

表 3

L_0(毫米)	0.12	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
$\Delta L_{0\text{最大}}$(微米)	0.16	0.19	0.23	0.26	0.29	0.33	0.36	0.39	0.42	0.46	0.49

以上讨论了迭代法本身产生的计数误差。在讨论中对计算得到的 b_3(或 a_3)值本身存在的误差不作考虑，因此，当凑整误差 $\delta b_3=0$ 时，就认为不存在系统误差。事实上，b_3 是据根当量波长 $\lambda_{当}$ 算得的，它们之间存在着下列关系：

$$\frac{\lambda_{当}}{8}=0.1\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}\right)\left(1-\frac{1}{b_3}\right)$$

微分上式后可得：

$$\delta b_3\approx 1.6b_3^2\delta\lambda_{当} \tag{28}$$

因此，由于当量波长误差 $\delta\lambda_{当}$ 所产生的计数误差为：

$$\delta L_0\approx\frac{L_0}{b_3^2}\delta b_3\approx 1.6L_0\delta\lambda_{当} \tag{29}$$

$\delta\lambda_{当}$ 与下列几项因素有关：

1．激光波长的不稳定度。

2．空气折射率的测定误差。在采用建立在实验基础上的空气折射率计算公式时，除了经验公式本身存在的误差外，当测量环境下的温度、气压对标准状态有较大的偏离时，计算公式产生的误差就更为明显。

3．工件材料线胀系数的测定误差。

4．工件温度和空气温度、气压的测定误差。

参 考 资 料

[1] 哈尔滨量具刃具厂，JGY-01 型工业激光干涉仪研制总结

[2] 合肥工大"国外技术"，测量长度的激光干涉仪，1972，4

[3] 合肥工大"国外技术"，测量位移的激光测量器的电子计数和记录装置，1972，4

[4] 沈阳仪器仪表研究所，JG-1 型激光干涉仪研制报告