理论分析

激光模式的角分布

高坤敏　戴显熹

（复旦大学）

一、引　言

激光模式角分布对激光通讯、测距、准直等工作来说，均是重要的。例如在离发射点距离为 z 的地方，面积为 $\frac{\pi}{4}d^2$ 的探测器上所接收到的功率为：

$$\Delta J=KU_0\frac{d^2}{4}\frac{\ln 2}{z^2\Theta^2}\exp\left[-[\ln 2]\left(\frac{\rho^2}{z^2\Theta^2}\right)-(\alpha+\beta)z\right]。$$

其中 Θ 为基模发散角。在某些测距工作中，为了增加功率和非协作目标的漫反射的强度，可采用适当阶次的高阶模。因此在研制激光器时要控制模式及其角分布，以及研究它们对传输的影响。

文章[1]所分析的是平行平面腔和对称共焦腔($n=0,1,2,3$)，实际应用中广泛地采用各种曲率的平凹腔、半同心腔等，这是为了满足模式选择、角分布、功率、稳定性、工艺精度等特殊方面的要求而综合设计的。因此本文的目的之一是试图分析各种稳定腔的各阶模式的角分布，求出它们的通式，并证明对每个高斯型腔的各阶模式角分布质量可用一个特征参量 Q_0 来描写。

由于半同心腔等在应用上有一定的优点，我们采用等效定理和(5)式计算了角分布等，这是准几何光学近似得不到的。

激光模式角分布的理论与实验比较，也是检验模式理论的一个重要方面。因此我们采用有限孔径共焦腔的严格解计算了角分布与发散角。

二、窄光束角分布的非傅里叶表式

激光谐振腔的模式，实际上是谐振腔中允许的分立的电磁场的本征态。模式的角分布是指模式的电磁场辐射功率的角分布。因此从物理观点来看，应该通过场的能流密度矢量 $\boldsymbol{S}$ 来计算(方案 I)：

$$D(\theta,\varphi)d\Omega=\lim_{r\to\infty}\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{\sigma}。\tag{1}$$

当然，也可以用场的三维傅里叶变换来计算(方案 II)：

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{k})=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}。\tag{2}$$

在真空中，或均匀、各向同性的无吸收介质中，当源集中在有限区域时，则场的单频辐射在波区具有 $\frac{1}{r} f(\theta, \varphi) e^{ikr}$ 的形式，由麦克斯韦方程的一般解，可以证明存在下列一般关系：

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{k})=\frac{4\pi}{k} i\delta_{+}(k-k_0)\boldsymbol{f}(\theta, \varphi)+\boldsymbol{C}_0 \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{C}_0$ 为有界矢量。δ_+ 是 δ 函数的正频部。

由(3)可知，不论用 $\boldsymbol{S}$ 或 $\boldsymbol{C}$，所算的角分布的结果是一致的。(2)还指出，求 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{k})$ 要知道全空间的场。(3)指出此积分是发散的，但可以通过场的辐射区的渐近值求出 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{k})$ 的主部，它已足以确定相对角分布了。

在研究有限孔径腔的模式时，一般要求解模式的积分方程组[2]

$$\hat{K}(1,2)E^{(2)}=\gamma^{(1)}E^{(1)}; \quad \hat{K}(2,1)E^{(1)}=\gamma^{(2)}E^{(2)}。 \tag{4}$$

而所获得的解一般只是镜片表面的场分布。因此再需要通过镜片表面的场直接求出角分布的公式(方案 III)。文章[1]认为一般情况下可用镜片表面的场的二维傅氏变换的绝对值平方来表示角分布，即[1]中的(5)、(11)、(15)式。这种表式是与关系式(3)相抵触的。我们从惠更斯原理和玻印廷矢量 $\boldsymbol{S}$ 出发，利用关系式(1)，考虑非涅耳近似和窄光束的特点，导出由镜片表面的场求出角分布振幅 $f(\theta, \varphi)$ 的公式为：

$$f(\theta, \varphi)=\frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma} E(x_0, y_0) \exp\left\{ik\left[\sin\theta\cos\varphi x_0+\sin\theta\sin\varphi y_0-\frac{1}{2R}\cos\theta(x_0^2+y_0^2)\right]\right\} dx_0 dy_0 \tag{5}$$

其中 R 是输出镜片的球面曲率半径，Σ 是镜片面积。

对圆镜腔，$E_{pl}(\rho, \varphi)=g_{pl}(\rho)\begin{Bmatrix}\cos l\varphi \\ \sin l\varphi\end{Bmatrix}$；$f(\theta, \varphi)$ 的表式为：

$$f(\theta, \varphi)=\frac{i}{\lambda}(2\pi i^l)\begin{Bmatrix}\cos l\varphi \\ \sin l\varphi\end{Bmatrix}\int_0^a g_{pl}(\rho) J_l(k\rho\sin\theta) e^{-i\frac{k}{2R}\cos\theta\rho^2} \rho d\rho。 \tag{6}$$

(5)、(6)表式的特点是非傅里叶和汉克尔变换，存在一个与镜片曲率有关的指数因子 $e^{i\frac{k}{2R}\cos\theta\rho^2}$，它在平面腔情况下为 1，因此公式回复到二维傅氏变换。因此文章[1]对平面腔的计算是与(5)结果一致的。[1]中对 $1/R \neq 0$ 的共焦腔的一切计算结果，将与(5)不一致。可以证明，表式(5)、(6)与方案(I)、(II)是内部完全一致的。

三、大孔径腔的模式角分布

作为表式的应用的实例，利用方案(III)讨论无限孔径腔模式角分布。因为当非涅耳数 $N\to\infty$ 时积分方程组(4)具有较为严格的解析解。将这些较严格的解代入(5)、(6)，较为严格地完成积分后可以得到(计算略)各阶模式的角分布为：

(A) 圆镜腔：

$$D(\theta, \varphi)d\Omega=A^2\begin{Bmatrix}\cos^2 l\varphi \\ \sin^2 l\varphi\end{Bmatrix}\left[\frac{KW_0^2(\theta)}{2}\right]^2 [Q_0^2(\theta)\sin^2\theta]^l [L_p^l(Q_0^2(\theta)\sin^2\theta)]^2$$

$$\cdot\exp[-Q_0^2(\theta)\sin^2\theta] d\Omega。 \tag{7}$$

其中 $$W_0(\theta)=\frac{W_2}{\left[1+\frac{K^2\cos^2\theta W_2^4}{4R_2^2}\right]^{1/2}}\doteq W_0;\quad Q_0(\theta)=\frac{K}{\sqrt{2}}W_0(\theta)$$

W_2 为输出镜片上的光斑尺寸，W_0 为腰尺寸。$L_p^l(x)$ 为蒂合拉盖尔多项式。还可以通过(7)求出 $C(\boldsymbol{k})$ 的主部。

(B) 对方镜腔：

$$D(\theta,\varphi)d\Omega=A^2\frac{K^2}{4}W_0^4(\theta)H_m^2\left(\frac{W_0(\theta)}{\sqrt{2}}K\sin\theta\cos\varphi\right)H_n^2\left(\frac{W_0(\theta)}{\sqrt{2}}K\sin\theta\sin\varphi\right)$$
$$e^{-\frac{1}{2}W_0^2(\theta)K^2\sin^2\theta}d\Omega。\tag{8}$$

讨论：

(I) 凡大孔径稳定腔，对应的各阶模式具有统一的表达式，每个腔都具有一个角分布的特征参量 Q_0，在一般情况下均可以略去 $Q_0(\theta)$ 对 θ 的依赖关系：

$$Q_0(\theta)\approx Q_0(0)=\sqrt{\frac{2\pi L}{\lambda}}\left[\frac{g_1g_2(1-g_1g_2)}{(g_1+g_2-2g_1g_2)^2}\right]^{1/4}=\frac{1}{\sqrt{2}}KW_0\tag{9}$$

它对各阶模式是通用的，它反映腔的角分布的品质。Q_0 越大，角分布越集中；反之，则散得越开。算出腔体的单参数 $Q_0(0)$，就可以全面地比较两个腔体的(各阶模式)角分布的质量，而无须作各阶模式的角分布图表。例如大孔径情况下，常用的似平面腔的角分布全面地比共焦腔的好(小孔径情况在第五节讨论)，角分布最差的是同心腔和半同心腔；平凹腔中球面曲率半径越大则角分布越好。

(II) 作为(7)和(8)的特例，可以求出各腔的基模的发散角(半功率点的锥角宽度)：

$$\Theta=\sin^{-1}\sqrt{\left(\frac{\ln 2}{2\pi}\right)\frac{\lambda}{L}}\left[\frac{(g_1+g_2-2g_1g_2)^2}{g_1g_2(1-g_1g_2)}\right]^{1/4}。\tag{10}$$

在一般情况下，Θ 很小，$\sin\Theta\approx\operatorname{tg}\Theta$，即与文章[3]的结果一致。在共焦腔情况下

$$2\Theta=2\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}\cdot\frac{\lambda}{L}}\approx 1.88\left(\frac{\lambda}{2a}\right)\sqrt{N}。$$

比文章[1]的值 $2\Theta'=1.34\left(\frac{\lambda}{2a}\right)\sqrt{N}$ 大41%，这是因为基本出发点的分歧造成的。

数值计算表明，在方镜腔情况下，“高阶模式在离轴支瓣上具有较近轴支瓣具有更大的能量。”因而在定性上与文章[1]的计算结果不同。原因是[1]在积分中有疏忽。

四、同心腔的角分布与发散角

准几何光学近似不适用于稳定区域边界上的腔体，例如同心腔、半同心腔、平面腔等。鉴于它们在应用上的重要性，又需要考虑这些腔体。例如半同心腔的模式选择方便，对镜片的垂直度要求低，在冷却水等机械冲击下仍较稳定等，因此在应用上也较为重视。一般都知道同心腔发散角大。究竟多大？因为计算复杂，准几何光学近似失效，因此未有过定量的结果。现在我们来讨论这个问题。

首先求出同心腔在镜片上的场。因为对称同心腔有 $g_1=g_2=-1$，因此利用模式积分方程的较严格的等效性定理[4,5]，可知 g 值符号相反，数值相同的两个腔的本征函数(和本征

值)互为复数共轭，因此利用资料[6]关于平行平面腔的模式解析式，可以求出同心腔的场分布：

$$E_m(x)=\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\frac{m\pi x}{2a\left[1+0.824\left(\frac{1-i}{\sqrt{8\pi N}}\right)\right]}\right),\quad m=\begin{cases}1,3,5,\cdots\\ 2,4,6,\cdots\end{cases} \tag{11}$$

(按照[7]的数值计算，在 N 不太小时，半同心腔和同心腔有相似的场分布(在球面镜上)，因此可以一起讨论。)因此当 N 很大时，即与平行平面腔的模式一致。如果按[1]的理论，则同心腔与平面腔有相同的角分布。这是与实验相抵触的。因为一般情况下二者几乎是两个极端，平面腔发散角最小，而同心腔的最大。

现在按照(5)式进行计算。引入无量纲参量 $\gamma=Ka\sin\theta$，它是约化的角度。在 $N>5$ 时，讨论 $m=1,3,5$ 的情况。角分布为：

$$D(\gamma)=\frac{\left|\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\xi\right)\exp[i(\gamma\xi-2\pi N\xi^2)]\,d\xi\right|^2}{\left|\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\xi\right)\exp[-2\pi N\xi^2 i]\,d\xi\right|^2} \tag{12}$$

数值计算结果示于图1中。

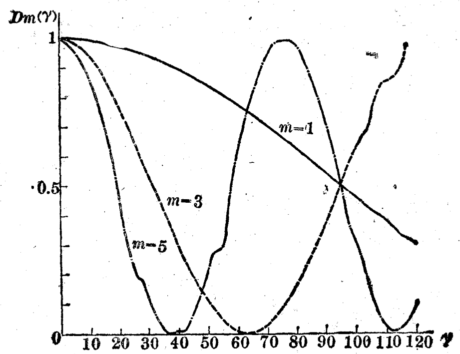

图1　对称同心腔的模式角分布 $D_m(\gamma)\sim\gamma$

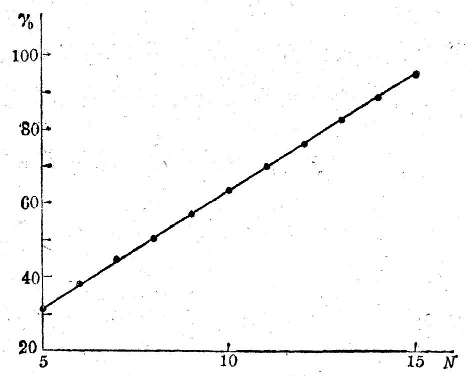

图2　对称同心腔的基模发散角 $\gamma_0\sim N$ 的关系

基模的发散角由下列积分型的函数方程求出：

$$\frac{\left|\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)\exp[i(\gamma_0\xi-2\pi N\xi^2)]\,d\xi\right|^2}{\left|\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)\exp[-2\pi N\xi^2]\,d\xi\right|^2}=\frac{1}{2} \tag{13}$$

以数值法求解此方程，得到约化发散角 γ_0 与 N 的关系，如图2所示(准确到 10^{-3})。由图中可以看到，在 $N>5$ 时，γ_0 几乎正比于 N：

$$\gamma_0=\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\Theta=\alpha\left(\frac{a^2}{L\lambda}\right)$$

$$\sin\Theta=N\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)\left(\frac{\lambda}{2a}\right)=6.25\left(\frac{N\lambda}{2a\pi}\right)。 \tag{14}$$

可见，同心腔的发散角确实远比平面腔的大$\left(\text{平面腔有 }\Theta=0.59\left(\frac{\lambda}{2a}\right)\right)$，约大一个数量级，而且随 N 而线性增大。但同心腔的发散角 Θ 比镜片对高斯光束的腰的张角 $\alpha_0=2(a/L)$ 要小一半。

$$\sin\Theta=\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)\left(\frac{a}{L}\right)=0.996\left(\frac{a}{L}\right)=\frac{1}{2}\alpha_0 \tag{15}$$

这给我们实验上以一个有效的估计。

五、有限孔径共焦腔的角分布与发散角

在许多有限孔径腔的模式方程组中，只有共焦腔是唯一严格解出的。因此它对检验模式理论的准确性是很有用的。

共焦腔的模式积分方程为[2]：

$$G_m(c,\eta)=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2\pi}\,x_m}\int_{-1}^{1}G_m(c,\zeta)e^{i\eta c\zeta}d\zeta,\qquad c=2\pi N。\tag{16}$$

利用椭球波函数的一个积分表示[8, 9]：

$$2i^nR_{0n}^{(1)}(c,1)S_{0n}(c,\eta)=\int_{-1}^{1}e^{ic\eta\zeta}S_{0n}(c,\zeta)d\zeta。\tag{17}$$

资料[2]获得带状镜共焦腔的本征函数的严格解为：

$$G_m(c,\eta)=A_mS_{0m}(c,\eta)\tag{18}$$

其中 $R_{0n}(c,\eta)$ 和 $S_{0n}(c,\eta)$ 分别为长椭球波函数的径向和角度部分。利用(5)可以证明各阶模式角分布振幅可以用椭球波函数的级数表示：

$$\begin{aligned}f_n(\gamma)&=A_na\int_{-1}^{1}S_{0n}(c,\zeta)e^{i(\frac{\gamma}{c})c\zeta-i\frac{c}{2}\zeta^2}d\zeta\\&=A_na2i^nR_{0n}^{(1)}(c,1)\sum_{\mu=0}^{\infty}\alpha_\mu\left[S_{0n}\left(c,\frac{\gamma}{c}+\frac{\mu\pi}{c}\right)+S_{0n}\left(c,\frac{\gamma}{c}-\frac{\mu\pi}{c}\right)\right]。\end{aligned}\tag{19}$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha_\mu=\alpha_{-\mu}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{c}}e^{-\frac{(\pi\nu)^2}{2}}i\Big[&C\left(\sqrt{\frac{\pi}{c}}\mu+\sqrt{\frac{c}{\pi}}\right)-C\left(\sqrt{\frac{\pi}{c}}\mu-\sqrt{\frac{c}{\pi}}\right)\\&-i\left(S\left(\sqrt{\frac{\pi}{c}}\mu+\sqrt{\frac{c}{\pi}}\right)-S\left(\sqrt{\frac{\pi}{c}}\mu-\sqrt{\frac{c}{\pi}}\right)\right)\Big]\end{aligned}$$

$C(x)$ 和 $S(x)$ 均为菲涅耳积分。由于 $S_{0n}(C,\eta)$ 较复杂，虽有许多作者作了大量工作（参见资料[8]），但它的数值表尚不够细致。因此我们在不同的区域采用不同的计算方式讨论基模情况：

(i) $0\leqslant C\leqslant 5$，用勒让德多项式展开，角分布展式为：

$$D(\gamma(\theta))=\frac{\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty}d_{2k}^{00}(C)\int_{-1}^{1}P_{2k}(\eta)e^{i\gamma\eta-i\frac{C}{2}\eta^2}d\eta\right|^2}{\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty}d_{2k}^{00}(C)\int_{-1}^{1}P_{2k}(\eta)e^{-i\frac{C}{2}\eta^2}d\eta\right|^2}\tag{20}$$

(ii) 在 $C>5$ 时，用厄密多项式展开，角分布为：

$$D(\gamma(\theta))=\frac{\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-2k}a_{4k}\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{1/2}e^{i\gamma(\theta)-(1+i)\frac{c}{2}\eta^2}H_{4k}(\sqrt{c}\,\eta)d\eta\right|^2}{\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-2k}a_{4k}\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{1/2}e^{-(1+i)\frac{c}{2}\eta^2}H_{4k}(\sqrt{c}\,\eta)d\eta\right|^2}\tag{21}$$

为了获得高阶的厄密多项式，通常的递推关系不甚方便。我们推导出一个显示式：

$$H_m(x)=\sum_{\mu=0,1}^{n}(-1)^{\frac{n-\mu}{2}}2^{\frac{n+\mu}{2}}[1\cdot3\cdot5\cdots(n-\mu-1)]C_n^{n-\mu}x^{\mu} \tag{22}$$

它可以使我们较容易地写出 $H_m(x)$，例如：

$$H_{12}(x)=665280-7983360x^2+13305600x^4-7096320x^6$$
$$+1520640x^8-135168x^{10}+4096x^{12}。$$

各种 N 的角分布数值计算结果示于图3中，发散角由数值法求解下列积分型函数方程给出：

$$D(\gamma_0)=\frac{1}{2}。 \tag{23}$$

γ_0 与 C 的关系绘于图4中。为了对照起见，将准几何光学近似结果：

$$\bar{\gamma}_0=1.177\sqrt{C} \tag{24}$$

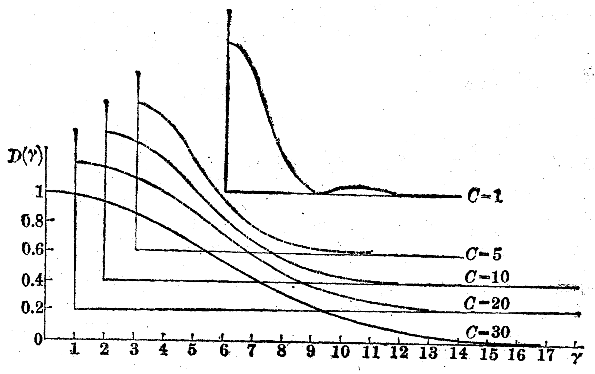

图3 各种 C 下共焦腔的角分布 $D(\gamma)\sim\gamma$ 的关系

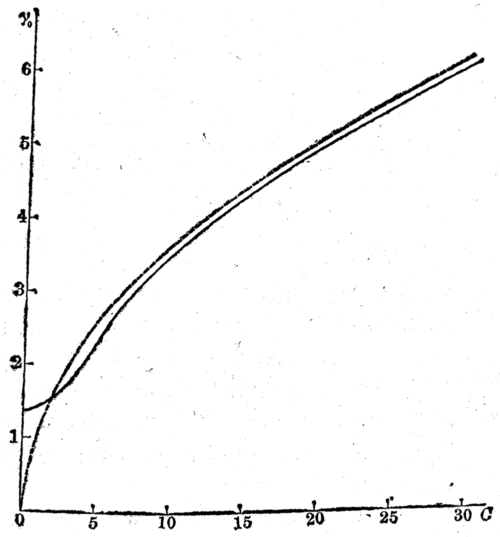

图4 共焦腔基模简约发散角 $\gamma_0\sim C$ 的关系

同时表示于图中(虚线)。由图中看出：

(i) 当 $C>6(N>1)$ 时，曲线很快接近于准几何光学近似结果。$\gamma_0\sim\bar{\gamma}_0(C>6)$。

(ii) 当 $C<6$ 时，开始明显偏离 $\bar{\gamma}_0$ 的值，但当 $N\to0$ 时，并不趋于0，这是测不准关系的限制。按照测不准关系有：

$$\gamma_0\geqslant\frac{1}{2}。 \tag{25}$$

而 $N\to0$ 时，共焦腔的结果是：

$$\gamma_0=1.392。 \tag{26}$$

即比测不准关系的最低值大2.8倍。

(iii) 在 $N<0.5$ 时，出现共焦腔发散角比平面腔的发散角小的情况。(以往人们往往以为这是错觉，如[1]所述)。在长波长激光器情况下，这个事实可能被考虑。因为这种激光器的 N 一般是很小的。为了增大增益(减小放电管直径)，减小损耗，提高模选性能，共焦腔是合适的[7]。

(iv) 设共焦腔的 $\gamma_0=f(N)$，由图看出，只有当 $N<0.25$ 时才出现 $f(N)>\bar{\gamma}_0$，即比高斯型模式的发散角大。

有限孔径的非共焦腔(g_1, g_2)的发散角表示式$\gamma_0(N, g_1, g_2)$的计算甚为复杂，按照上面的分析，估计内推的表式为：

$$\gamma_0(N, g_1, g_2)=\frac{f(N')}{\sqrt{2}}\left[\frac{(g_1+g_2-2g_1g_2)^2}{g_1g_2(1-g_1g_2)}\right]^{1/4}。\tag{27}$$

其中N'为等效菲涅耳数：

$$N'=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{a^2}{W_0^2(g_1g_2)}\right]=N\left(\frac{W_0(0,0)}{W_0(g_1,g_2)}\right)。\tag{28}$$

其中W_0为腰尺寸。(27)在$g_1=g_2\to 0$时，回到共焦腔的结果；在$N\to\infty$时，回到准几何光学结果。因此(27)可作为内推表式。

(v) 总之，在大孔径情况下：

平面腔 $\Theta=0.295\left(\frac{\lambda}{a}\right)$ (反比于 a)；

共焦腔 $\Theta=0.94\left(\frac{\lambda}{L}\right)$ (与 a 无关)；

同心腔 $\Theta=0.996\left(\frac{a}{L}\right)$ (正比于 a)。

参考资料

[1] 方洪烈，«物理», 1972, **1**, No2, 108; 1973, **2**, No4, 215.

[2] A. G. Fox, T. Li; *BSTJ*, 1961, **40**, 453. G. D. Boyd, J. P. Gordon; *BSTJ*, 1961, **40**, 489.

[3] Norio Karube; *Proc. IEEE*, 1964, **52**, No3, 327.

[4] A. G. Fox, T. Li; *Proc. IEEE*, 1963, **51**, 80.

[5] J. P. Gordon, H. Kogelnik; *BSTJ*, 1964, **43**, 2873.

[6] Л. А. Вайнштейн; “Открытые резонаторы и открытые вольноводы”, Изд. “Советское Радио”, 1966.

[7] T. Li; *BSTJ*, 1965, **44**, 917.

[8] Flammer C., Spheroidal Wave Fanctions, Stanford Univ. Press, Palo Alto, Calif., 1957

[9] D. Slepian, H. O. Pollak; *BSTJ*, 1961, **40**, 43.