

全息照相成象的几何分析

王 润 文

(中国科学院上海光机所)

提 要

本文用几何光学的观点来描述全息照相的成象过程, 由于波带板兼有正透镜与负透镜的作用, 结合几何光学中的薄透镜公式建立了全息照相的物象关系。

一、引 言

全息照相的记录和再现过程通常是用波动光学的观点来分析的^[1, 2]。关于将全息照片看成具有透镜作用的波带板, 从而解释全息照相的记录和再现过程, 参考资料[4, 5]中也作过定性的讨论, 尽管波带板的等效透镜公式已从理论上推导出来^[6], 但定量的计算还尚未见过报导。本文的目的就是引用波带板的等效透镜公式来确定全息照相中物空间与象空间的关系, 所导出的公式与波动光学的结果相一致, 而在数学演算上则要简单得多(只需要代数就可以了)。

在光学领域中物理光学与几何光学有很多平行的关系。从全息照相的等效透镜概念, 使我们想到是否全息照相这样一个通常认为属于物理光学范畴的问题, 也可能建立在几何光学的基础之上呢? 为了阐述上的方便, 我们下面先介绍波带板对全息照相的定性解释, 然后再来推求一些常用的关系式。

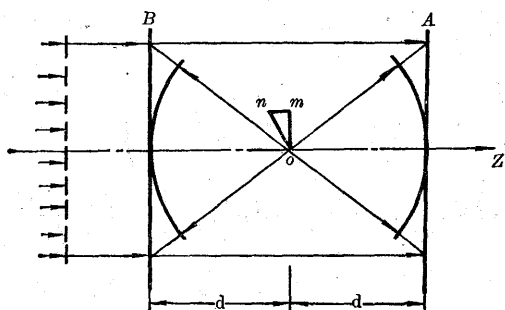


图 1

如图 1 所示, 有两束相干光, 平面波与球面波在空间相遇而干涉, 假定 o 为球面波发射中心, 它发出均匀振幅的球面波, 另一与之相干的平面波沿 z 轴方向传播, A 及 B 为其两个波前, 于是在 A 及 B 平面就会出现干涉环, 若用感光干板记录下来, 就得到一块波带板。若 A 及 B 平面与 o 点等距, 则得到的波带板 A 与 B 是完全相同的。由于波带板的作用与透镜相当^[5], 故图 1 的波带板 B 就相当于焦距为 d 的正透镜, 波带板 A 却相当于焦距为 d 的负透镜。因为 A 与 B 具有同样的干涉条纹, 所以一块波带板就能同时兼有正透镜与负透镜的作用。又如图 2 所示, 若用一束相干平行光照射 A 波带板, 则经衍射后, 在右方有一会聚点 o_2 , 而在左方有另一虚会聚点 o_1 。若我们把图 1 中 o 点看作点物体, 它发出的球面波称为物光束, 而平行光称为参考光束, 则波带板 A 或 B 就是物点 o 的全息照相。图 2 就是物点 o 的再现过程, 用原来平行的参考光束照射就获得两个物点, 一个是虚物点 o_1 , 另一个是实物点 o_2 。当原来物体是一扩展物体, 如图 1 的 omn 三角形, 则

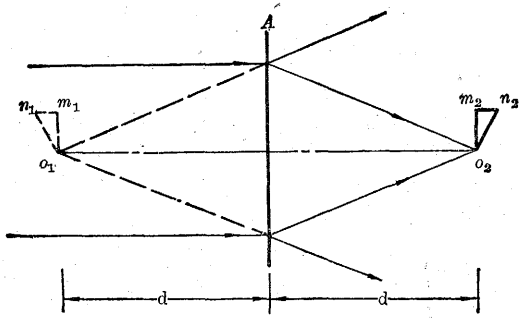


图 2

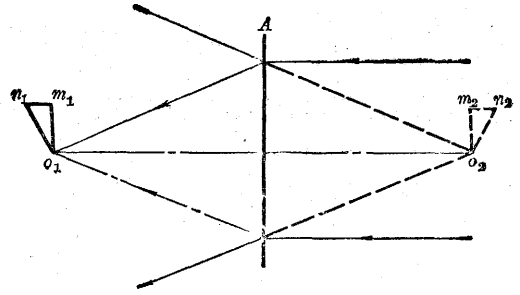


图 3

三角形上每一点都可当作一物点独立地发出相干球面波，在 A 面就会记录下一张由无数物点与平行参考光波形成的复合波带板，再现时也能得到一个会聚象 $o_2 m_2 n_2$ 和一个虚象 $o_1 m_1 n_1$ ，并且虚象与原物体相同，而实象却是相反的。若不改变全息照相的方位，而将平行的参考光束逆转方向，如图 3 所示，再现的虚实两象也就互逆。对于球面波的参考光束也可以有相似的讨论，如图 4 所示，参考球面波由点源 R 发出，与物点 o 的球面波在 A 面相干干涉形成波带板，假定参考源与全息图之距离 D 不变，物点在轴的右方或左方，只要物点与干涉面 A 或 B 间的距离 d 满足一些条件，也将形成完全相同的波带板，如图 4(a)、(b) 所示。这样在再现时，若用同样的参考点源，同样也会再现出实与虚的物点(或物体)。倒逆参考光束方向，虚实两象亦将互逆，正如图 5(a)、(b) 所示。

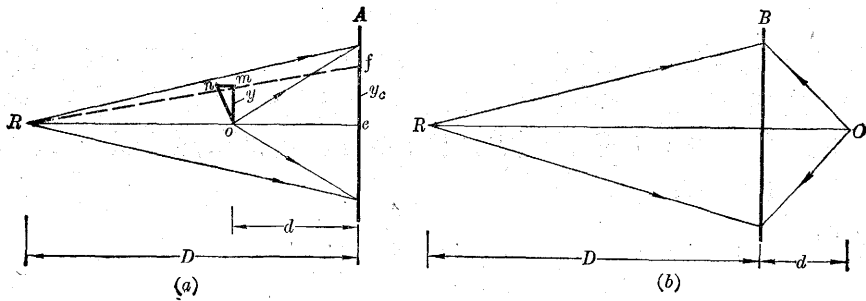


图 4

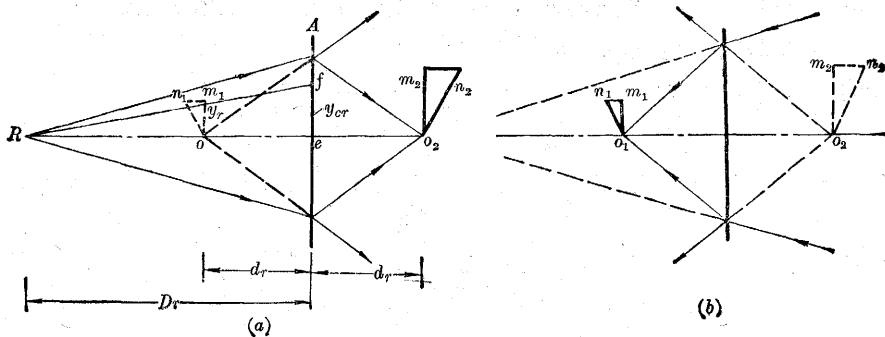


图 5

二、全息照相成象的几何光学分析

既然波带板起着透镜作用,则按图4系统可以利用薄透镜公式求出波带板的焦距来^[6]

$$\frac{1}{D} - \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

及

$$\frac{1}{D} - \frac{1}{d} = \frac{-1}{f} \quad (2)$$

其中(1)式代表波带板作正透镜的关系式,为图4(b)的情况。(2)式代表作负透镜时的关系式,为图4(a)的情况。如果再现时参考点源距离全息照相的距离为 D_r ,又若摄取时的系统如图4(a)一样,则再现物体的距离为 d_r 。考察再现虚象时,利用关系:

$$\frac{1}{D_r} - \frac{1}{d_r} = \frac{-1}{f} \quad (3)$$

与(2)式联立便可求得虚象与全息图之距离为:

$$d_r = \left(\frac{1}{D_r} + \frac{1}{d} - \frac{1}{D} \right)^{-1} \quad (4)$$

而当考察再现实象时,由(1)式有

$$\frac{1}{D_r} - \frac{1}{d_r} = \frac{1}{f} \quad (5)$$

与(2)式联立便得实象与全息图的距离为:

$$d_r = \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d} + \frac{1}{D_r} \right)^{-1} \quad (6)$$

这儿 D 、 D_r 、 d 及 d_r 的符号规定全息图左面为正,右面为负。设原物体垂轴高度为 y ,其两端点 o 、 m 各自在干板 A 上形成两个独立波带板,中心各为 e 及 f 点,令其间距为 y_0 (参阅图4),在再现过程的图5中相应再现物体高度便是 y_r 了。由相似三角形并应用(1)、(2)式之关系,就能求得 y_r 的表示式:

虚象情况

$$y_r = \frac{y}{d} \left(\frac{1}{D_r} + \frac{1}{d} - \frac{1}{D} \right)^{-1} \quad (7)$$

实象情况

$$y_r = \frac{y}{d} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d} + \frac{1}{D_r} \right)^{-1} \quad (8)$$

这样由于参考点源在拍摄时与再现时对全息图之距离不一致就会出现横向放大率 $M_{横}$ 与纵向放大率 $M_{纵}$,我们从(7)、(8)及(4)、(6)各式容易求得

虚象情况

$$M_{横} = \frac{y_r}{y} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{D_r} + \frac{1}{d} - \frac{1}{D} \right)^{-1} \quad (9)$$

$$M_{纵} = \frac{\delta d_r}{\delta d} = \frac{1}{d^2} \left(\frac{1}{D_r} + \frac{1}{d} - \frac{1}{D} \right)^{-2} \quad (10)$$

实象情况

$$M_{横} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d} + \frac{1}{D_r} \right)^{-1} \quad (11)$$

$$M_{纵} = \frac{-1}{d^2} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d} + \frac{1}{D_r} \right)^{-2} \quad (12)$$

(9)~(12)式表明了再现图形在轴向出现了平方缩小与放大,只要 $D_r \neq D$, 则原来正方形的物体再现时变成梯形,球形物体变成鹅卵状了。

更为一般的情况是,如果摄制好的全息图(或波带板)经过缩放,然后进行再现观察,设缩放率为 m

$$m = \frac{y_{cr}}{y_c} = \frac{y_2}{y_1} \quad (13)$$

式中 y_c 及 y_{cr} 代表缩放前后复合波带板中两个单波带板之中心距,而 y_1 及 y_2 为任意第 n 个波带环缩放前后之垂轴距离。又假定拍摄波长 λ_1 与再现波长 λ_2 之比值为

$$\mu = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (14)$$

应用熟知的关于波带板的光学关系式^[6]有

$$\sqrt{n\lambda_1 f_1} = y_1 \quad ; \quad \sqrt{n\lambda_2 f_2} = y_2 \quad (15)$$

将这些关系式代入(1)、(2)关系式,我们就会得到一般情况下再现物体与全息图之距离 d_r 及垂轴大小 y_r (参阅图 4(a) 及图 5(a))

虚象情况

$$d_r = \left(\frac{1}{D_r} + \frac{\mu}{m^2 d} - \frac{\mu}{m^2 D} \right)^{-1} \quad (16)$$

$$y_r = y m \left(1 + \frac{m^2 d}{\mu D_r} - \frac{d}{D} \right)^{-1} \quad (17)$$

实象情况

$$d_r = \left(\frac{1}{D_r} - \frac{\mu}{m^2 d} + \frac{\mu}{m^2 D} \right)^{-1} \quad (18)$$

$$y_r = y m \left(1 - \frac{m^2 d}{\mu D_r} - \frac{d}{D} \right)^{-1} \quad (19)$$

相仿于(9)~(12)式可导得一般情况下 $M_{横}$ 与 $M_{纵}$ 的两个放大率

虚象情况

$$M_{横} = \frac{y_r}{y} = m \left(1 + \frac{m^2 d}{\mu D_r} - \frac{d}{D} \right)^{-1} \quad (20)$$

$$M_{纵} = \frac{\delta d_r}{\delta d} = \frac{\mu}{m^2 d^2} \left(\frac{1}{D_r} + \frac{\mu}{m^2 d} - \frac{\mu}{m^2 D} \right)^{-2} \quad (21)$$

实象情况

$$M_{横} = m \left(1 - \frac{m^2 d}{\mu D_r} - \frac{d}{D} \right)^{-1} \quad (22)$$

$$M_{纵} = -\frac{\mu}{m^2 d^2} \left(\frac{1}{D_r} - \frac{\mu}{m^2 d} + \frac{\mu}{m^2 D} \right)^{-2} \quad (23)$$

由(20)~(23)各式显然看出 $M_{纵} \neq M_{横}$, 于是出现立体畸变。由此可见用几何光学理论导出上述物象关系式要比运用菲涅耳衍射理论来得简单^[2, 7]。

现在我们来研究一下离轴式全息照相的情况。早期的全息照相是属于共轴式全息照相^[1], 它有一个严重缺点, 在再现时共轭象与真象互相干扰, 难以得到清晰的象质。直到 1962 年有人提出采用倾斜参考光束形成一个均匀的相干底衬^[8], 即所谓离轴全息照相法, 从而克服了共轴全息图的本质缺点。这种方法的摄取原理如图 6 所示。由于参考点 R 与物点 O 的连线并不与 H 面垂直, 当 RO 连线倾角很大时, 波带环中心就不在记录面 H 内, 于是只能记录下局部的干涉环。再现时如果参考点源 R 与 H 相对位置不变, 按上述物象关系理论, 再现象必然在 R 与波带环中心 G 的连线上, 并且在 G 的两边, 距离 $l_1 = d_r$ (虚), $l_2 = d_r$ (实), 可由上述

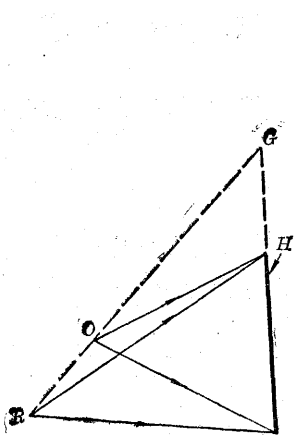


图 6

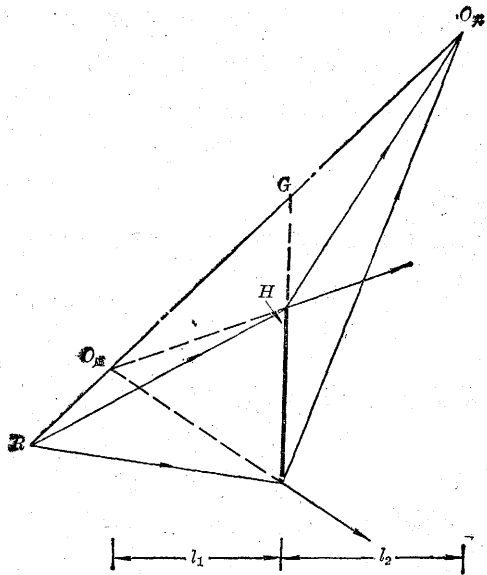


图 7

(4)、(6)两式分别算得，这样我们就获得了一个虚象点 $O_{虚}$ 和一个实象点 $O_{实}$ (如图 7 所示)，因而使交会于两个象点的光波传播方向互相分离了，于是就解决了真象与共轭象的干扰问题。其实，从几何光学观点来看，离轴与共轴全息图是没有本质差别的，只是离轴全息图情况下波带板中心不再在被记录的全息图内，或者是干板只记录下远离中心的边缘部分干涉图形，这时的波带板就相当于薄透镜的边缘切块，于是成象光束必然向中轴线方向偏转。

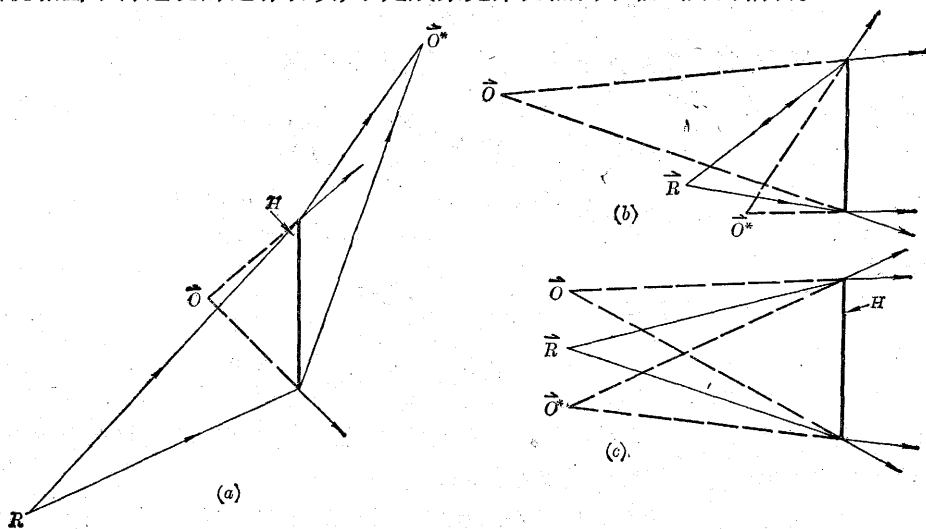


图 8

实际上真象与共轭象不一定分别是虚象与实象，它的虚实情况完全由薄透镜物象公式所确定。图 8 中的 (a)、(b)、(c) 代表三种情况：这儿令照明光束与摄取全息图之参考光束是相同的，(a) 是当参考点源 R 较物点距全息照相远，再现时真象与共轭象分别为虚象与实象；(b) 是当参考点源较物点距全息照相近，于是再现时得到两个都是虚象；(c) 是参考点源与物点都与全息图等距离，再现时两个象各在参考点上下方，并且都与全息图等距离，这就相当于无透

镜情况下的傅里叶变换全息图^[2,7,9]。因此图8中我们用 \bar{O} 与 \bar{O}^* 分别代表物体真象与共轭象更为普遍。同样,根据几何光学基本定律中光线传播的可逆性,我们可以在再现时倒逆参考光束方向而使得真象与共轭象互逆。并且,当原先分别是虚、实象时,倒逆后再现象的虚、实情况也将互逆。

综上所述,当物体不是一点时,物体上的每一点都与参考光束在干板面形成自己的波带板。只要激光光源有足够的时间与空间相干性,即使物空间很宽很深,而其上各点亦能在干板上有自己的波带环;再现时相应各点都可以准确成像。这就表明全息照相有可能获得很宽的视角和景深范围。

图9是一只三轴可调整的镜座的全息照相记录象,我们是采用离轴式来摄取的,并将其再现象用照相机记录下来。图10是一群艺术塑象的两张记录象,它们都是由同一张全息照相再现象记录下来的,所不同的是上图将照相机对焦于再现象群中最后面的一个,由于照相机镜头景深限制,前面其余塑像群之记录象显得模糊了。

下图是相反的情况,这时的记录象系对焦于最前面一个的塑象之再现象,于是其后之塑象群之记录象也因离焦而模糊了。这一结果证明全息照相具有很大景深。



图 9

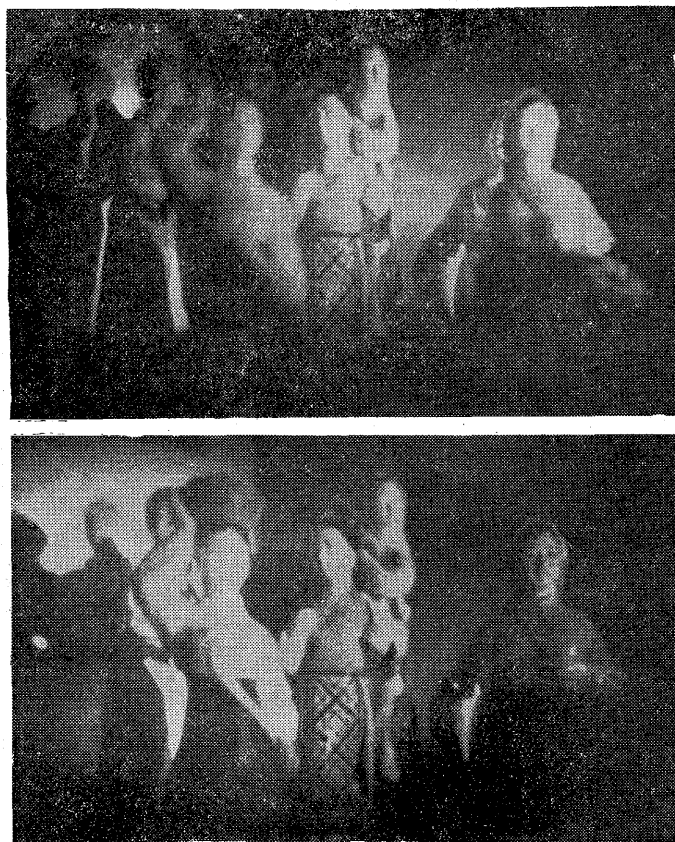


图 10 (取自资料[3])

三、讨 论

以上用几何光学方法导出的若干公式与过去资料中用波动光学得到的一阶解析结果相一致(例如比较本文公式(4)、(16)和资料[2]第40、第111页上的公式)。很自然地,我们可以设想把全息照相成象过程建立在简单的薄透镜成象原理的基础上。应用这种原理,全息照相中的景深、空间畸变以及象的虚实关系等,都可以从简单的几何光学观点来理解。

关于用几何光学方法来分析全息照相,进一步还可以解决那些问题呢?我们可以举几个例子:用几何光学透镜公式可以研究全息照相成象过程的各种象差(这在精确分析中是必须考虑的);仿照用几何光学分析透镜组合的方法来分析全息照相的组合系统,等等。

当然,由于简单几何光学方法所固有的局限性,这种方法显然不适用于分析极限分辨、散粒效应、非线性成象等等与衍射过程密切相关的问题。

参 考 资 料

- [1] D. Gabor, *Nature*, **161**(1948), 777; D. Gabor, *Proc. Roy. Soc.*, **A197** (1949), 454; D. Gabor, *Proc. of the Phys. Soc., Sec. B64* (1951), 449;
- [2] H. M. Smith, 《全息学原理》,中国科学院物理所译,科学出版社,1972;
- [3] 王英、苗苞,科学普及资料(1973)第1期;
- [4] A. R. Shulnan, *Optical Data Processing*, New York (1970);
- [5] *Progress in Optics VI*, E. Wolf ed. (1967), 3~50;
- [6] A. Sommerfeld, *Optics, Lectures on theoretical Physics Vol. IV*, New York, (1954)
- [7] R. L. Collier, Christoph B. Burckhardt, L. H. Lin, *Optical Holography*, New York, (1971)
- [8] E. N. Leith, J. Upatnieks, *J. O. S. A.*, **52**(1962), 1123; E. N. Leith, J. Upatnieks, *J. O. S. A.*, **53**(1963), 1377;
- [9] G. W. Stroke., *An Introduction to Coherent Optics and Holography*, 2nd ed. New York, (1969)

* * ~~~~~ * * *

(上接第6页)

中国复辟资本主义,效法孔老二“克己复礼”,鼓吹“天才论”,极端仇视劳动人民,诬蔑人民群众是只知道“油盐酱醋柴”的“下愚”和“群氓”;在科技领域中大搞“专家路线”,极力扩大资产阶级法权,反对广大知识分子走与工农兵相结合的道路,反对科研和生产劳动相结合;鼓吹洋奴哲学,爬行主义,甚至还散布什么“生产要为科研服务”的反动谬论,妄图把科研工作引向修正主义的邪道上去,变成他们复辟资本主义的工具。历史和现实的斗争,使我们进一步理解了“思想上政治上的路线正确与否是决定一切的”这一伟大真理,加深了对发展科学技术关键在于要有一条正确的思想政治路线的认识。我们要坚定不移地在毛主席无产阶级革命路线指引下,努力贯彻执行宪法所提出的科学“为无产阶级政治服务,为工农兵服务,与生产劳动相结合”的方针。用马克思主义占领自然科学阵地。我们坚信社会主义的光学事业一定能够更加迅速向前发展,一支无产阶级的光学技术队伍在斗争中更加发展壮大,我国光学技术的成就将更加灿烂辉煌。